ÜNİTE I.

KONİKLERİN ANALİTİK İNCELENMESİ

BU BÖLÜMÜN AMAÇLARI

* Bu bölümde konikleri ve koniklerin ortak özeliklerini tanıyabilecek ve düzlemde analitik incelenmesini göreceğiz.

1. Elipsi analitik olarak incelemek ve uygulamalar yapabilmek için;

* Elipsi tanımlayabilmemiz için elipse ait asal ve yedek eksenleri tanıyabilecek. Bu eksenlerin uzunluklukları hesaplayabilecek,

* Elipse ait özel noktalar olan, elipsin köşelerinin ve odak noktalarının koordinatlarını odaklar arası uzaklığını ve elipsin dış merkezliğini hesaplayabilecek,

* Elipsin çemberleri olan, asal çember, yedek çember ve doğrultman çemberlerinin denklemlerini yazabilecek,

* Merkezil elipsin denklemini yazabilecek ve bu elipsin bütün özeliklerini tanıyabilecek,

* Denklemi verilen bir merkezil elipsin parametrik denklemini ve aynı şekilde parametrik denklemi verilen bir elipsin merkezil denklemini yazabilecek,

* Denklemi verilen elips ile bir doğrunun durumlarını inceleyebilecek,

* Denklemi verilen merkezil bir elipse, üzerindeki bir noktadan çizilen teğet ve normalin denklemini yazabileceksiniz,

2. Hiperbolü analitik olarak incelemek ve uygulamalar yapabilmek için;

* Bir hiperbolü tanımlayabilmemiz için, hiperbolün eksenleri olan asal eksen ve yedek eksenlerini tanıyabilecek ve bu eksenlerinin uzunluklarını hesaplayabilecek,

* Hiperbole ait özel noktalar olan, merkezini, köşelerinin ve odak noktalarının koordinatlarını yazabilecek, odak noktaları arası uzaklığını ve hiperbolün dış merkezliğini hesaplayabilecek,

* Hiperbolün çemberleri olan, asal, yedek ve doğrultman çemberinin denklemlerini yazabilecek,

* Merkezil hiperbolün denklemini yazabilecek ve bu hiperbolün odakları hangi eksenler üzerinde olduğunu söyleyebilecek,

* Denklemi verilen hiperbol ile bir doğrunun birbirine göre durumlarını inceleyebilecek,

* Hiperbole üzerindeki bir noktadan çizilen teğet ve normalin denklemini yazabilecek,

* Denklemi verilen bir hiperbolün, köşegen ve asimptot doğrularının denklemlerini yazabilecek,

* Verilen bir ikizkenar hiperbolü tanıyabilecek ve bu hiperbolün özeliklerini ve bunlara ait uygulamaları yapabileceksiniz.

3. Parabolü analitik olarak incelemek ve uygulamalar yapabilmek için;

* Verilen bir parabolün denklemini tanıyabilecek, bu parabolün eksenlerini ve doğrultman doğrusunu, simetri ekseninin denklemini yazabilecek, doğrultman doğrusunun denklemi ve odak noktasının koordinatları verilen parabolün denklemini yazabilecek,
* Parabolün özel noktaları olan, parabolün odak noktasının ve tepe noktasının koordinatlarını yazabilecek, parabolün parametresini ve dış merkezliğini hesaplayabilecek,
* Tepe noktası orjinde olan, merkezil parabolün her türlü denklemini yazabilecek,
* Parabol ile bir doğrunun birbirine göre durumlarını inceleyebilecek,
* Bir parabole üzerindeki bir noktadan çizilen teğet ve normalin denklemini yazabilecek ve bunlarla ilgili uygulamaları yapabileceksiniz.

NASIL ÇALIŞMALIYIZ?

* Koniklerin analitik incelenmesi, yeni bir konu olduğundan, konunun başından itibaren anlaşılmayan kısımları geçmeden, disiplinli bir şekilde çalışmalıyız. Çünkü konular kolaydan zora, basitten karmaşığa doğru gitmektedir.
* Her konunun sonunda verilen örnekleri mutlaka çözünüz Anlayamadığınız kısımları tekrar ediniz.
* Bu bölümde hiç karşılaşmadığınız yepyeni problemlerle karşılaşacaksınız. Bu zorlukları aşmak için koniklerin özeliklerinin ve formüllerin ezbere bilinmesi gerekir.
* Konu sonunda verilen alıştırma ve değerlendirme testlerini cevaplayınız.
* Bu konuların yer aldığı kaynak kitaplardan yararlanarak çok sayıda sorular çözünüz.

ÜNİTE I

KONİKLERİN ANALİTİK İNCELENMESİ

1. GİRİŞ: Düzlemde sabit noktaya ve sabit bir doğruya olan uzaklıkları oranı sabit olan noktaların geometrik yerine, konik denir.

Düzlemde sabit noktaya odak, sabit doğruya doğrultman doğrusu ve sabit orana dış merkezlik denir.

Bu bölümde elips, hiperbol ve parabolün analitik incelenmesini ayrı ayrı öğreneceğiz.

2. ELİPS

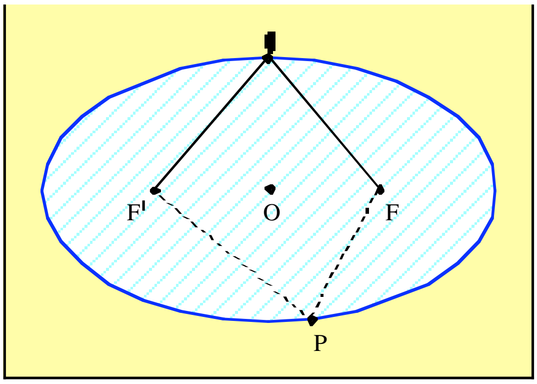
I. Tanımlar

Düzlemde, sabit iki noktaya olan uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yerine elips denir. Sabit olan iki noktaya elipsin odakları, odakları birleştiren doğru parçasının orta noktasına da elipsin merkezi denir.

Defterinize F ve F´ gibi sabit iki noktaya toplu iğne batıralım. Uzunluğu 2a birim olan bir ip alalım. İpin iki ucunu, F ve F´ noktalarında bulunan toplu iğneye bağlıyalım. Kaleminizin sivri ucu ile ipi gergin tutarak defterinize çizdiğiniz kapalı eğri bir elipstir. (Şekil 1.1)

Çizilen eğri üzerinde herhangi bir nokta P ise |PF| + |PF´| = 2a birimdir. x noktasının eğri üzerindeki yeri değiştirildiğinde, bu toplam uzunluğunun değeri değişmez.

F, F´ noktalarına, elipsin odakları, FF´ doğru parçasının uzunluğuna da elipsin odaklar arası uzaklığı denir.



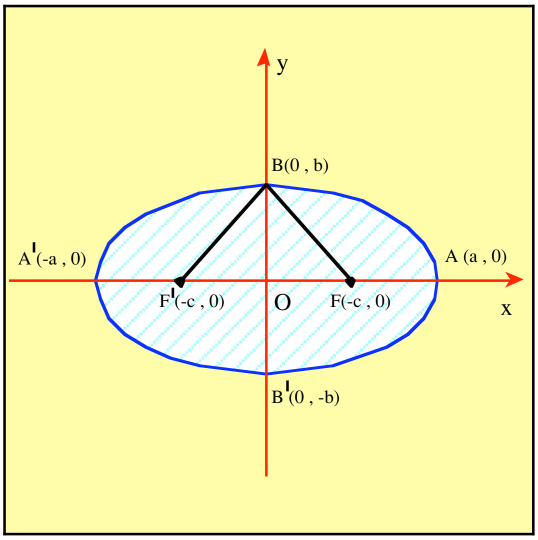
Şekil 1.1

> Elips, düzlemde kapalı bir eğridir.

II. Elipsin eksenleri ve özel noktaları

Analitik düzlemde, merkezi orijinde ve odakları x ekseni üzerinde olan bir elips çizelim. Bu elipsin odakları F ve F´ olsun. A, A´ noktalarına elipsin asal köşeleri; B, B´ noktalarına da elipsin yedek köşeleri denir. (Şekil 1.2)

a. Asal Eksen: Elipsin merkezi O noktası olmak üzere, elipsin x ekseni ile kesim noktaları A ve A´ olsun. AA´ doğrusuna elipsin asal ekseni (büyük eksen) denir. (Şekil 1.2)



Şekil 1.2

$|OA| = |OA'| = a$ birimdir. Bu uzunluğa, elipsin yarı büyük eksen uzunluğu, $|AA'| = 2a$ birim uzunluğuna da elipsin büyük eksen uzunluğu denir.

b. Yedek eksen: Elipsin y ekseni ile kesim noktaları B ve B´ olsun. BB´ doğrusuna, elipsin yedek ekseni (küçük eksen) denir.

$|OB| = |OB'| = b$ birimdir. Bu uzunluğa elipsin yarı küçük eksen uzunluğu, $|BB'| = 2b$ birim uzunluğuna da elipsin küçük eksen uzunluğu denir.

Bir elipste, asal eksen ve yedek eksen birer simetri eksenidir. Elipsin merkezi ise elipsin simetri merkezidir.

c. Merkezil elips: Merkezi orijin olan ve köşeleri koordinat eksenlerinde bulunan elipse, merkezil elips denir.

d. Elipsin köşeleri: Elipse ait olan ve eksenler üzerinde bulunan, A (a, 0) , A´(-a, 0), B (0, b) ve B´ (0, -b) noktalarına, elipsin köşeleri denir.

e. Elipsin odak noktaları: Elipsin odak noktaları, asal eksen üzerinde bulunan F (c, 0) ve F´ (-c, 0) noktalarıdır. $|OF| = |OF'| = c$ birimdir.

$|FF'| = 2c$ birim uzunluğuna elipsin odaklar arası uzaklığı denir.

(Şekil 5.2) deki BOF dik üçgeninde, Pisagor bağıntısından,

$|BF|^2 = |OB|^2 + |OF|^2$ ya da $a^2 = b^2 + c^2$ dir.

$BF'F$ üçgeninin meydana gelmesi için, $|BF'| + |BF| > |F'F|$ dür.
Böylece, $2a > 2c$ veya $a > c$ olmalıdır.

f. Elipsin dış merkezliği: Elipsin odaklar arası uzaklığının, büyük eksen (asal eksen) uzunluğuna oranına, elipsin dış merkezliği denir. Dış merkezlik e ile gösterilir.

$$\text{Dış merkezlik} = \frac{\text{Odaklar arası uzunluk}}{\text{Büyük eksen uzunluğu}} \quad ; \quad e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \text{ dir.}$$

$c < a$ olduğundan, $\frac{c}{a} < 1$ ve $0 < e < 1$ olur.

ÖRNEK 1 : Büyük eksen uzunluğu 20 birim, küçük eksen uzunluğu 16 birim olan merkezil elipsin, köşelerinin ve odaklarının koordinatlarını bulalım.

ÇÖZÜM 1 : Büyük eksen uzunluğu**,** $2a = 20$ birim olduğundan, $a = 10$ birimdir.

Küçük eksen uzunluğu, $2b = 16$ birim olduğundan, $b = 8$ birimdir

$a^2 = b^2 + c^2$ olduğundan, $(10)^2 = (8)^2 + (c)^2$ dir.

$c^2 = 100 - 64 = 36$ ise $c = 6$ birimdir.

Elipsin köşelerinin koordinatları :

Asal köşeleri : $A(a, 0) = A(10, 0)$ ve $A'(-a, 0) = A'(-10, 0)$ dır.

Yedek köşeleri: $B(0, b) = B(0, 8)$ ve $B'(0, -b) = B'(0, -8)$ dir.

Odak noktaları: $F(c, 0) = F(6, 0)$ ve $F'(-c, 0) = F'(-6, 0)$ olur.

ÖRNEK 2 : Odaklar arası uzunluğu 8 birim, yedek eksen uzunulğu $4\sqrt{5}$ birim olan merkezil elipsin dış merkezliğini bulalım.

ÇÖZÜM 2: Verilen elipste; odaklar arası uzunluk, $2c = 8$ birim ise $c = 4$ birimdir.

Yedek eksen uzunluğu, $2b = 4\sqrt{4}$ birim ise $b = 2\sqrt{5}$ birimdir

$a^2 = b^2 + c^2$ olduğundan, $a^2 = (2\sqrt{5})^2 + (4)^2$ dir.

Buradan, $a^2 = 20 + 16 = 36$ ise $a = 6$ birimdir.

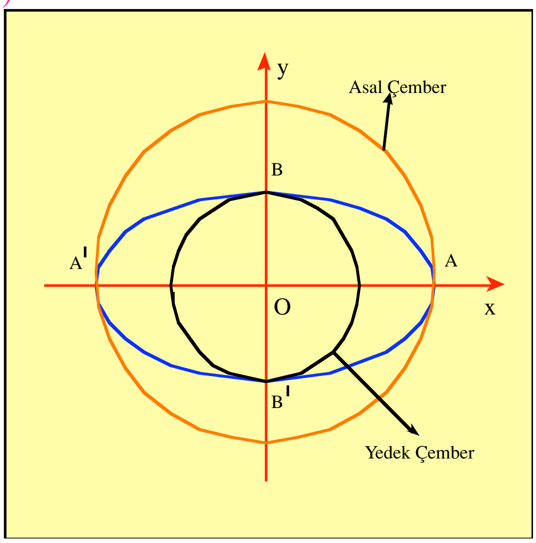
Elipsin dış merkezliği ; $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ olur.

III. Elipsin çemberleri

a. Asal çember: Merkezi, elipsin merkezi ve yarıçap uzunluğu a birim olan çembere, elipsin asal çemberi denir. (Şekil 1.3)

Yarıçap uzunluğu r olan merkezil çemberin denklemi, $x^2 + y^2 = r^2$ olduğundan, elipsin asal çemberin denklemi, $x^2 + y^2 = a^2$ olur. (Şekil 1.3)

b. Yedek çember: Merkezi, elipsin merkezi ve yarıçap uzunluğu b birim olan çembere, elipsin yedek çemberi denir. Yedek çemberin denklemi $x^2 + y^2 = b^2$ olur. (Şekil 1.3)



Şekil 1.3

c. Doğrultman çemberi: Merkezi, elipsin odaklarından biri yarıçap uzunluğu 2a birim olan çembere, elipsin doğrultman çemberi denir.

Bir elipste iki tane doğrultman çember vardır. Bunlar;

1. Merkezi F´ (-c, 0) ve yarıçap uzunluğu 2a birim olan doğrultman çemberinin denklemi, $(x + c)^2 + y^2 = 4a^2$ dir.

2. Merkezi, F (c, 0) ve yarıçap uzunluğu 2a birim olan doğrultman çemberinin denklemi, $(x - c)^2 + y^2 = 4a^2$ dir.

ÖRNEK 3: Verilen bir elipsin asal eksen uzunluğu 26 birim, yedek eksen uzunluğu 24 birimdir. Bu elipsin asal çemberinin, yedek çemberinin ve doğrultman çemberlerinin denklemlerini yazalım..

ÇÖZÜM 3: Verilen bir elipsin asal eksen uzunluğu, 2a = 26 birim ise a = 13 birimdir.

Yedek eksen uzunluğu, 2b = 24 birim ise b = 12 birimdir.

Odaklar arası uzunluğu $c^2 = a^2 - b^2$ olduğundan,

$c^2 = (13)^2 - (12)^2 = 169 - 144 = 25$ ise c = 5 birim olur.

Elipsin asal çemberinin denklemi $x^2 + y^2 = a^2$ olduğundan, $x^2 + y^2 = 169$ olur.

Elipsin yedek çemberinin denklemi; $x^2 + y^2 = b^2$ olduğundan, $x^2 + y^2 = 144$ tür.

Elipsin doğrultman çemberlerinin denklemleri; $(x + c)^2 + y^2 = 4a^2$ olduğundan,

$(x + 5)^2 + y^2 = 676$ ve $(x - c)^2 + y^2 = 4a^2$ olduğundan, $(x - 5)^2 + y^2 = 676$ olur.

IV. Merkezil elipsin denklemi

a. Odakları x ekseni üzerinde olan elipsler

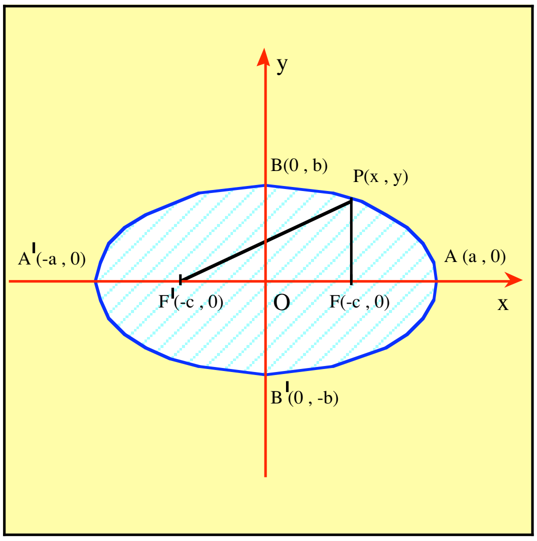
Odakları x ekseni üzerinde olan merkezil bir elips üzerinde değişken nokta P(x, y) olsun. (Şekil 1.4) göre,

$|PF| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$ ve

$|PF'| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$ dir.

$|PF| + |PF'| = 2a$ olduğundan,

$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$ olur.



Şekil 1.4

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ iki tarafın karesini alalım.

$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$ sadeleştirirsek,

$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = (a^2 - cx)$ olur.

Tekrar her iki tarafın karesini alalım.

$\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = (a^2 - cx)^2$

$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$

Buradan ; $a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$

$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$; $(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

$a^2 - c^2 = b^2$ olduğundan, $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ olur.

Eşitliğin her iki tarafını a^2b^2 ile bölersek, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ elde edilir.

Bu bağıntıya, **merkezcil elipsin denklemi** denir.

ÖRNEK 4: Büyük eksen uzunluğu 10 birim, küçük eksen uzunluğu 8 birim olan ve odak noktaları x ekseni üzerinde bulunan, merkezil elipsin denklemini yazalım.

ÇÖZÜM 4: Büyük eksen uzunluğu 2a = 10 birim ise a= 5 birimdir.

Küçük eksen uzunluğu, 2b = 8 birim ise b = 4 birimdir.

Elipsin denklemi $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ olduğundan,

$\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ veya $16x^2 + 25y^2 = 400$ olur.

ÖRNEK 5: Denklemi $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$ olan elipsin;

a. Eksenlerinin uzunluklarını,

b. Köşelerinin koordinatlarını,

c. Odaklar arası uzunluğunu,

d. Odaklarının koordinatlarını,

e. Dış merkezliğini bulalım.

ÇÖZÜM 5: Verilen elipsin, $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ denkleminde $a^2 > b^2$ olduğundan, odaklar x ekseni üzerindedir.

a. Büyük eksen uzunluğu:

$a^2 = 169$ olduğundan, $a = 13$ birim ve $2a = 2(13) = 26$ birimdir.

Küçük eksen uzunluğu:

$b^2 = 144$ olduğundan, $b = 12$ birim ve $2b = 2(12) = 24$ birimdir.

b. Asal köşeleri: $A(a, 0) = (13, 0)$ ve $A'(-a, 0) = A'(-13, 0)$ dır.

Yedek köşeleri: $B(0, b) = B(0, 12)$ ve $B'(0, -b) = B'(0, -12)$ dir.

c. Odaklar arası uzunluğu $c^2 = a^2 - b^2$ olduğundan,

$c^2 = 169 - 144 = 25$ ise $c = 5$ tir. $2c = 2(5) = 10$ birimdir.

d. Odaklarının koordinatları: $F(c, 0) = F(5, 0)$ ve $F'(-c, 0) = F'(-5, 0)$ dır.

e. Dış merkezliği : $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{13}$ olur.

b. Odakları y ekseni üzerinde olan elipsler

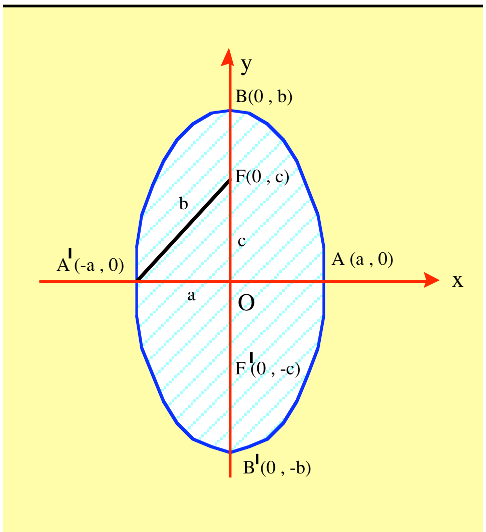
Denklemi, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ya da $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ olan elipste $a^2 < b^2$ ise elipsin odak noktaları y ekseni üzerindedir. (Şekil 1.5)

Bu elipsin odak noktalarının koordinatları $F(0, c)$ ve $F'(0, -c)$ dir.

Büyük eksen uzunluğu: $|BB'| = 2b$ birim,

Küçük eksen uzunluğu: $|AA'| = 2a$ birimdir.

$FA'O$ dik üçgeninde pisagor bağıntısından $b^2 = a^2 + c^2$ olur.



Şekil 1.5

ÖRNEK 6: Denklemi $64x^2 + 25y^2 = 1600$ olan elipsin;

a. Eksenlerinin uzunluklarını,

b. Köşelerinin koordinatlarını,

c. Odaklar arası uzunluğunu

d. Odaklarının koordinatlarını,

e. Dış merkezliğini bulalım.

f. Analitik düzlemde çizimini yapalım.

ÇÖZÜM 6: $64x^2 + 25y^2 = 1600$ olan elipsin denklemini

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{64} = 1$ şeklinde yazabiliriz.

$a^2 < b^2$ olduğundan elipsin odakları y ekseni üzerindedir.

a. Büyük eksen uzunluğu: $b^2 = 64$ olduğundan, $b = 8$ ve $2b = 2.8 = 16$ birimdir.

Küçük eksen uzunluğu: $a^2 = 25$ olduğundan, $a = 5$ ve $2a = 2.5 = 10$ birimdir.

b. Asal köşeleri: B (0, b) = B (0, 8) ve B´ (0, -b) = B´(0, - 8) dir.

Yedek köşeleri: A (0, a) = A (0, 5) ve A´ (0, -a) = A´(0, - 5) dir.

c. Odaklar arası uzunluğu: $c^2 = b^2 - a^2$ olduğundan,

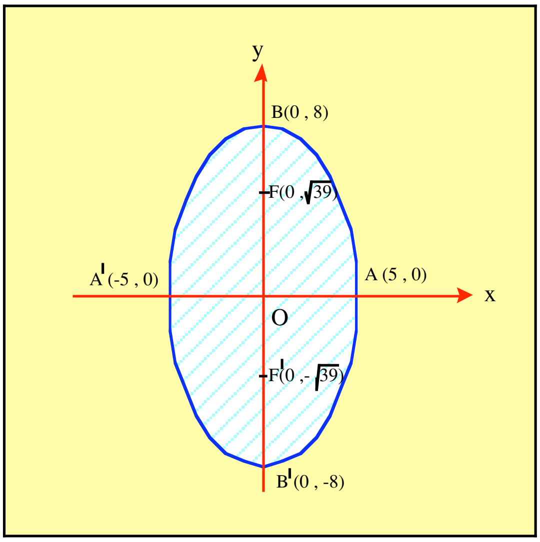
$c^2 = 64 - 25 = 39$ ise $c = \sqrt{39}$ dur. $2c = 2\left(\sqrt{39}\right) = 2\sqrt{39}$ birimdir.

d. Odaklarının koordinatları: $F\ (0, c) = F\left(0, \sqrt{39}\right)$ ve

$F'\ (0, -c) = F'\left(0, -\sqrt{39}\right)$ dur.

e. Dış merkezliği: $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{39}}{8}$ tir.

f. (Şekil 1. 6) da, elipsin analitik düzlemde çizimi yapılmıştır.



Şekil 1.6

V. Elipsin parametrik denklemi

Denklemi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ olan elipsi, $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ şeklinde yazabiliriz.

$0 \le \theta < 2\pi$ açıları için $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ dir.

Buna göre, elips üzerinde alınan herhangi bir $P(x, y)$ noktası için,

$\frac{x}{a}=\cos\theta$ ve $\frac{y}{b}=\sin\theta$ olacak şekilde bir θ reel sayısı vardır.

Buradan, $x = a\cos\theta$ ve $y = b\sin\theta$ elde edilir.

Buna, **elipsin parametrik denklemi** denir.

$P(x, y) = P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ noktası elips üzerinde olduğundan, elips denklemini sağlar.

ÖRNEK 7: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ olan elipsin parametrik denklemlerini yazalım.

ÇÖZÜM 7: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ elips denkleminde;

$a^2 = 36$ ise $a = 6$ ve $b^2 = 25$ ise $b = 5$ tir.

Elipsin parametrik denklemi: $x = a\cos\theta$ olduğundan $x = 6\cos\theta$

$y = b\sin\theta$ olduğundan, $y = 5\sin\theta$ olur.

ÖRNEK 8: Parametrik denklemleri $x = 5\cos\theta$ ve $y = 3\sin\theta$ olan elipsin merkezil denklemini yazalım.

ÇÖZÜM 8

$x = 5\cos\theta$ ise $\frac{x}{5}=\cos\theta$ ve $\cos^2\theta=\frac{x^2}{25}$ tir.

$y = 3\sin\theta$ ise $\frac{y}{3}=\sin\theta$ ve $\sin^2\theta=\frac{y^2}{9}$ dur.

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ olduğundan, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ elde edilir.

O halde, elipsin merkezil denklemi , $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ olur.

VI. Elips ile bir doğrunun birbirine göre durumları

Denklemi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ veya $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ şeklinde verilen bir elips ile denklemi $y = mx + n$ olan doğrunun birbirine göre durumlarını incelemek için, bu iki denklemin ortak çözümleri bulunur. Bunun için, $b^2x^2 + a^2(mx+n)^2 = a^2b^2$ olur. Bu denklemi sadeleştirirsek,

$b^2x^2 + a^2m^2x^2 + 2a^2mnx + a^2n^2 = a^2b^2$

$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$ denklemi elde edilir.

Bu denklemde Δ yi bulalım.

$\Delta = 4a^4m^2n^2 - 4(b^2 + a^2m^2)(a^2n^2 - a^2b^2)$

$\Delta = 4a^4m^2n^2 - 4b^2a^2n^2 + 4a^2b^4 - 4a^4m^2n^2 + 4a^4m^2b^2$

$\Delta = 4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - n^2)$ bulunur.

Burada daima $4a^2b^2 > 0$ olduğundan

a. $a^2m^2 + b^2 - n^2 > 0$ ise doğru elipsi farklı iki noktada keser.

b. $a^2m^2 + b^2 - n^2 < 0$ ise doğru ile elips birbirini kesmez. Ortak noktaları yoktur.

c. $a^2m^2 + b^2 - n^2 = 0$ ise doğru elipse teğettir. Teğetin değme noktasının koordinatları $P(x_1, y_1)$ ise,

$$x_1 = \frac{-2a^2mn}{2(b^2+a^2m^2)} = \frac{-2a^2mn}{2n^2} = -\frac{a^2m}{n} \text{ dir.}$$

$$y_1 = \frac{-a^2m^2+n^2}{n} = \frac{b^2}{n} \text{ dir.}$$

O halde, $P\left(-\frac{a^2m}{n}, \frac{b^2}{n}\right)$ olur.

Verilen $y = mx + n$ doğrusu, $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ elipsinde $a^2m^2 + b^2 = n^2$ bağıntısı var ise doğru elipse teğettir.
Bu teğetin değme noktasının koordinatları, $P\left(-\frac{a^2m}{n}, \frac{b^2}{n}\right)$ dir.

ÖRNEK 9: Denklemi $y = -2x + 2$ doğrusu ile $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ denklemi ile verilen elipsin birbirine göre durumlarını inceleyelip, çözümü analitik düzlemde gösterelim.

ÇÖZÜM 9: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ elipsin

denklemi $4x^2 + 9y^2 = 36$ şeklinde yazılabilir. $y = -2x + 2$ doğrusunun denklemi ile ortak çözümü yaparsak;

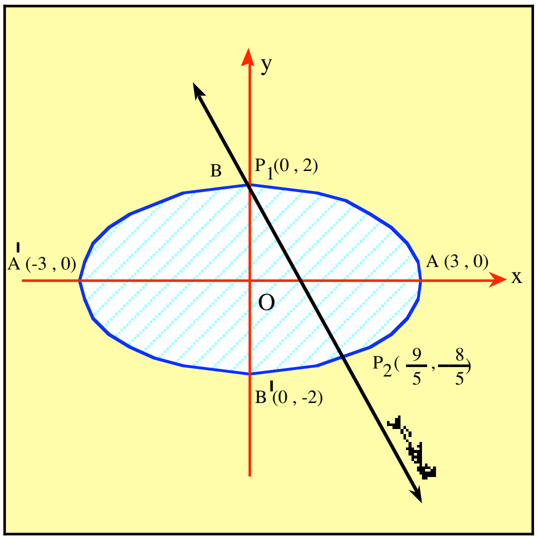
$4x^2 + 9(-2x + 2)^2 = 36$

$4x^2 + 36x^2 - 72x + 36 - 36 = 0$

$40x^2 - 72x = 0$

$x(40x - 72) = 0$

$x_1 = 0$ dır.



Şekil 1.7

$40x - 72 = 0$ denkleminden, $x_2 = \frac{72}{40} = \frac{9}{5}$ tir.

$y_1 = -2(0) + 2 = 2$ dir.

$y_2 = -2\left(\frac{9}{5}\right) + 2 = \frac{-18}{5} + \frac{10}{5} = -\frac{8}{5}$ tir. $P_1(0, 2)$ ve $P_2\left(\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}\right)$

noktaları olmak üzere, doğru elipsi iki noktada kesiyor.

Çizim (Şekil 1.7) de analitik düzlemde gösterilmiştir.

ÖRNEK 10: Denklemi $9x^2 + 4y^2 = 36$ olan elips ile denklemi $2x + y - 5 = 0$ doğrusunun birbirine göre durumlarını inceleyelim. Eğer bu doğru elipse teğet ise değme noktasının koordinatlarını bulalım.

ÇÖZÜM 10: Denklemleri verilen elips ile doğrunun birbirine göre durumlarını incelemek için, elips ile doğru denklemlerinin ortak çözümünü yapılır.

$9x^2 + 4(-2x + 5)^2 = 36$

$9x^2 + 16x^2 - 80x + 100 - 36 = 0$

$25x^2 - 80x + 64 = 0$

$\Delta = (-80)^2 - 4(25)(64)$

$\Delta = 6400 - 6400 = 0$ dır.

$\Delta = 0$ olduğundan doğru elipse teğettir. Teğetin değme noktasının koordinatlarını bulalım.

Denklemi, $9x^2 + 4y^2 = 36$ olan elipsi $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ve denklemi, $2x + y - 5 = 0$ olan doğruyu $y = -2x + 5$ şeklinde yazabiliriz. Genel bir elipsin denklemi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ve doğrunun genel denklemi $y = mx + n$ şeklindedir.

Elips için, $a^2 = 4$ olduğundan $a = 2$ dir. $b^2 = 9$ olduğundan $b = 3$ tür.

Doğru için, $m = -2$ ve $n = 5$ tir.

Bu teğetin değme noktaları $p(x_1, y_1)$ olduğundan,

$x_1 = -\frac{a^2 m}{n} = -\frac{4(-2)}{5} = \frac{8}{5}$ dir. $\qquad y_1 = \frac{b^2}{n} = \frac{9}{5}$ tir.

O halde, değme noktasının koordinatları, $P\left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$ olur.

VII. Elips üzerindeki bir noktadan çizilen teğet ve normalin denklemleri

a. Teğet denklemi

Denklemi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ olan elipse, üzerindeki bir $P(x_1, y_1)$ noktasından çizilen teğetin denklemini yazalım.

(Şekil 1.8) de, teğetin denklemi $y = mx + n$ olsun. Bir elips ile bir doğrunun birbirine göre durumlarını incelerken, doğru elipse teğet ise denklemlerinin ortak çözümünden, $\Delta = a^2m^2 + b^2 - n^2 = 0$ bulmuştuk.

Doğru elipse $P(x_1, y_1)$ noktasında teğet ise bu teğetin değme noktasının koordinatları, $P\left(-\frac{a^2m}{n}, \frac{b^2}{n}\right)$ dir.

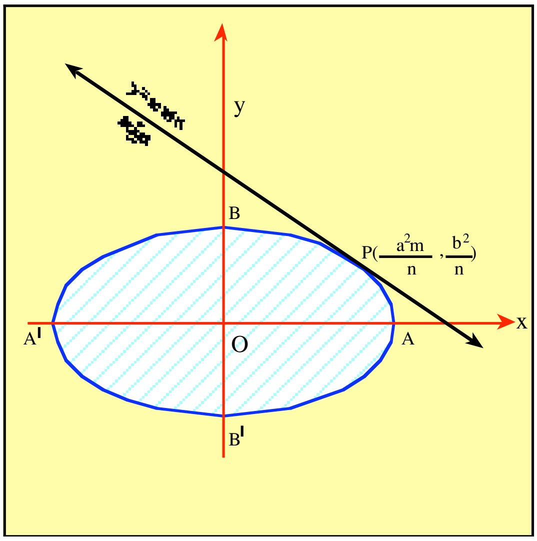
Denklemi $y = mx + n$ olan doğru, elips üzerindeki $P(x_1, y_1)$ noktasında teğet olduğundan bu nokta doğru denklemini sağlar. $y_1 = mx_1 + n$

$$y_1 = \frac{b^2}{n} \text{ ise, } n = \frac{b^2}{y_1} \text{ dir.}$$

$$x_1 = -\frac{a^2m}{n} = -\frac{a^2m}{\frac{b^2}{y_1}} = -\frac{a^2my_1}{b^2} \text{ dir.}$$

$$x_1 = -\frac{a^2my_1}{b^2} \text{ ise, } m = \frac{-x_1b^2}{a^2y_1} \text{ dir.}$$

Bu değerleri, $y = mx + n$ teğet denkleminde yerine yazarsak;



Şekil 1.8

$y = \frac{-x_1b^2}{a^2y_1}x + \frac{b^2}{y_1}$ olur. Payda eşitlemesini yaparsak, $a^2yy_1 = -x_1b^2x + a^2b^2$ veya $x_1xb^2 + y_1ya^2 = a^2b^2$ olur. Bunu, $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ şeklinde de yazabiliriz.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ denklemi ile verilen elipse, üzerindeki $P(x_1, y_1)$ noktasından çizilen teğetin denklemi $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ veya $x_1xb^2 + y_1ya^2 = a^2b^2$ dir.

b. Normalin denklemi

Denklemi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ olan elipse, üzerindeki $P(x_1, y_1)$ noktasından çizilen normalin denklemini yazalım. (Şekil 1.9) daki gibi, elips üzerindeki $P(x_1, y_1)$ noktasındaki teğet ve normal birbirine dik olduğundan eğimlerin çarpımı -1 dir.

Teğetin denklemi,

$$y = \frac{-x_1 b^2}{a^2 y_1} x + \frac{b^2}{y_1} \quad \text{olduğundan}$$

Teğetin eğimini, m_T ile gösterirsek,

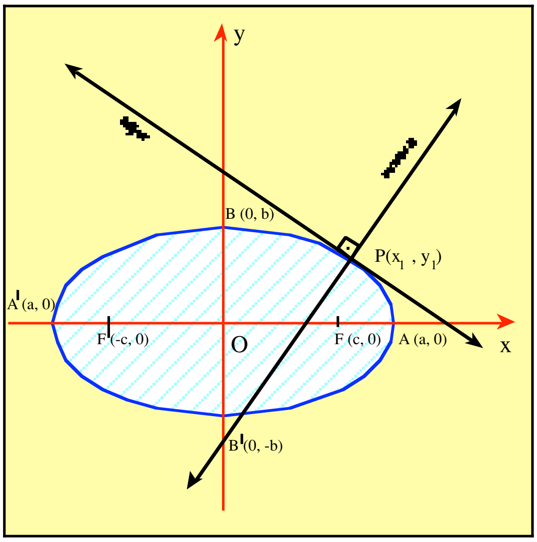
$$m_T = \frac{-x_1 b^2}{a^2 y_1} \quad \text{dir.}$$

Normalin eğimini, m_N ile gösterirsek,

$$m_N = -\frac{1}{m_T} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} \quad \text{dir.}$$

Normalin denklemi,

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1) \quad \text{olur.}$$



Şekil 1.9

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ denklemi ile verilen elipse üzerindeki P (x_1, y_1) noktasından geçen normalin denklemi; $y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$ dir.

ÖRNEK 11

$4x^2 + 16y^2 = 64$ denklemi ile verilen elips üzerindeki $P(2\sqrt{3}, y)$ noktasından $(y > 0)$ çizilen teğetin ve normalin denklemini yazalım.

ÇÖZÜM 11

$P(2\sqrt{3}, y_1)$ noktası, elips üzerinde olduğundan elips denklemini sağlar.

$4(2\sqrt{3})^2 + 16y^2 = 64$; $48 + 16y^2 = 64$ $16y^2 = 64 - 48$; $16y^2 = 16$

$y^2 = \frac{16}{16} = 1$ ise $y = 1$ dir. ($y > 0$ olduğundan) O halde, $P(2\sqrt{3}, 1)$ olur.

Elipse çizilen teğetin denklemi, $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ ifadesinden,

$$\frac{(2\sqrt{3})x}{16} + \frac{(1)y}{4} = 1 \quad \text{veya} \quad \frac{2\sqrt{3}x}{16} + \frac{y}{4} = 1 \quad \text{dir.}$$

Bunu sadeleştirirsek, $2\sqrt{3}x + 4y = 16$ veya $\sqrt{3}x + 2y - 8 = 0$ olur.

$P(2\sqrt{3}\ ,1)$ noktasındaki normalin denklemi;

$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$ ifadesinden,

$y - 1 = \frac{16\ (1\ )}{4\,(2\sqrt{3})}\left(x - 2\sqrt{3}\right)$ tür.

Bunu sadeleştirirsek, $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x - 4 + 1$ den

$y = \frac{2}{\sqrt{3}}x - 3$ veya

$2x - \sqrt{3}\,y - 3\sqrt{3} = 0$ olur.

ÖRNEK 12

Verilen $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ elipsine, $y = mx + 5$ doğrusu teğet olduğuna göre m nin alacağı değerleri bulalım.

ÇÖZÜM 12

$y = mx + n$ doğrusu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsine teğet ise,

$b^2 + a^2m^2 - n^2 = 0$ dır.

verilen değerler yerine yazılırsa,

$9 + 16m^2 - 25 = 0$ olur.

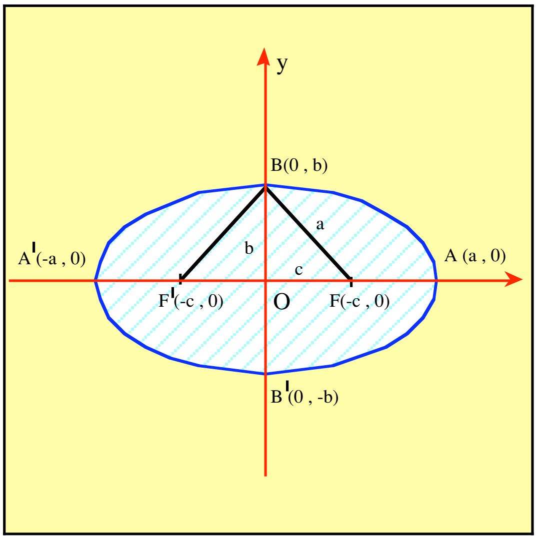
Buradan, $16m^2 = 16$; $m^2 = 1$ ise $m = \pm\ 1$ dir.
O halde, $m_1 = 1$ ve $m_2 = +1$ değerleri problemin çözümüdür.

VIII ÖZET

*Düzlemde sabit noktaya ve sabit bir doğruya olan uzakları oranı sabit olan noktaların geometrik yerine, **konik** denir. Sabit noktaya **odak**, sabit doğruya **doğrultman doğrusu** ve sabit orana **dış merekezlik** denir.

* Düzlemde sabit iki noktaya olan uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yerine **elips** denir. Sabit olan iki noktaya **elipsin odakları,** odakları birleştiren doğru parçasının orta noktasına da **elipsin merkezi** denir.

*(Şekil 1.10) da, A, A´ noktalarına **elipsin asal köşeleri,** B, B´noktalarına da **elipsin yedek köşeleri** denir. AA´ doğrusuna **elipsin asal ekseni** ve | AA´| = 2a birim uzunluğuna **elipsin büyük eksen uzunluğu** denir. BB´ doğrusuna **elipsin yedek ekseni** ve | BB´| = 2b birim uzunluğuna da **elipsin küçük eksen uzunluğu** denir. |FF´| = 2c birim uzunluğuna **elipsin odaklar arası uzaklığı** denir. Bir elipste, $a^2 = b^2 + c^2$ dir. Elipsin odaklar arası uzaklığının, büyük eksen uzunluğuna oranına **elipsin dış merkezliği** denir. $e = \frac{c}{a}$ ve $0 < e < 1$ olur.



Şekil 1.10

* Merkezi, elipsin merkezi ve yarıçap uzunluğu a birim olan çembere, **elipsin asal çemberi** denir. Merkezi, elipsin merkezi ve yarıçap uzunluğu b birim olan çembere **elipsin yedek çemberi** denir. Merkezi, elipsin odaklarından biri ve yarıçap uzunluğu 2a birim olan çembere **elipsin doğrultman çemberi** denir.

* Elipsin yarı büyük eksen uzunluğu a birim, elipsin yarı küçük eksen uzunluğu b birim ve elips üzerinde değişken nokta P(x , y) ise **elipsin merkezil denklemi** $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ veya $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dir.

* Denklemi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ olan elips üzerinde P(x , y) noktası alalım. **Elipsin parametrik denklemi** $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ $(\theta \in R)$ dir.

$P(x , y) = P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ şeklindeki noktalar elips üzerindedir.

* Denklemi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ olan elips ile denklemi $y = mx + n$ şeklinde olan doğrunun birbirine göre durumunu incelemek için, bu iki denklemin ortak çözümü yapılır. Buna göre;

a. $a^2m^2 + b^2 - n^2 > 0$ ise doğru elipsi farklı iki noktada keser.

b. $a^2m^2 + b^2 - n^2 = 0$ ise doğru elipse teğettir.

c. $a^2m^2 + b^2 - n^2 < 0$ ise doğru elipsi kesmez.

*Denklemi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ olan bir elipse üzerindeki $P(x_1 , y_1)$ noktasından geçen teğetin denklemi, $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$

normalin denklemi, $y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$ dir.

IX. ALIŞTIRMALAR

1. Büyük eksen uzunluğu 10 birim ve odaklar arası uzaklığı 6 birim olan, elipsin denklemini yazınız.

2. Aşağıda denklemleri verilen merkezil elipslerin eksen uzunluklarını ve odaklar arası uzaklıklarını, köşelerinin ve odaklarının koordinatlarını bulunuz.

   a. $x^2 + 9y^2 = 81$ **b.** $4x^2 + 25y^2 = 100$

   c. $9x^2 + 16y^2 = 144$ **d.** $5x^2 + 9y^2 = 405$

3. Denklemi, $4x^2 + 9y^2 = 36$ olan elipsin dış merkezliğini bulunuz.

4. Denklemi, $16x^2 + 25y^2 = 400$ olan bir elipsin;

   a. Asal çemberinin denklemini,

   b. Yedek çemberinin denklemini,

   c. Doğrultman çemberlerinin denklemlerini yazınız.

5. Parametrik denklemi $x = 6 \cos t$ ve $y = 4 \sin t$ olan elipsin kartezyen denklemini yazınız.

6. Denklemi, $x^2 + 2y^2 = 12$ olan elipsin üzerindeki, P (2 , 2) noktasından çizilen teğetin ve normalin denklemini yazınız.

7. Denklemi, $x^2 + 4y^2 = 4$ olan elipsin, x ekseni ile pozitif yönde 45° lik açı yapan teğetlerinin denklemlerini yazınız.

8. Asal çemberinin denklemi, $x^2 + y^2 = 16$ ve yedek çemberin denklemi, $x^2 + y^2 = 9$ olan elipsin denklemini yazınız.

9. Denklemi, $5x^2 + 36y^2 = 324$ olan elipsin $y = x + 3$ doğrusuna paralel olan teğetlerinin denklemlerini yazınız.

10. Denklemi, $5x^2 + 6y^2 = 26$ olan elipste, $y = x - 1$ doğrusunun ayırdığı kirişin uzunluğu kaç birimdir?

3. HİPERBOL

I. Tanımlar

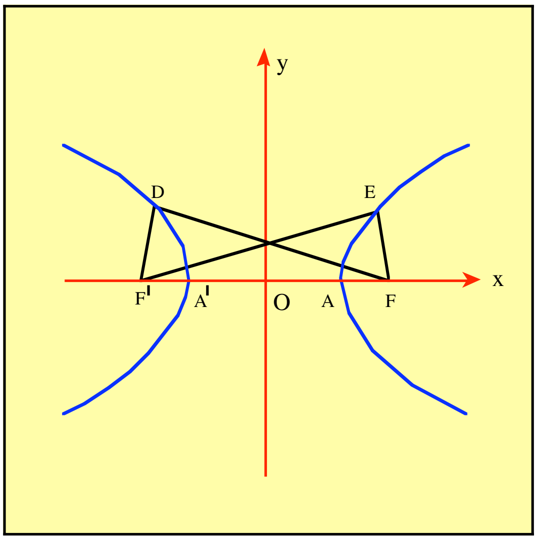
Düzlemde, sabit iki noktaya olan uzaklıkları farkının mutlak değeri, sabit olan noktaların kümesine hiperbol denir.

(Şekil 1.11) deki sabit olarak alınan F ve F´noktaları **hiperbolün odaklarıdır.** Sabit uzunlukta 2a birimdir. D ve E noktaları hiperbole ait birer nokta olduğundan

$|DF| - |DF'| = 2a$ birimdir.

$|EF'| - |EF| = 2a$ birimdir.

Hiperbol eğrisi elips eğrisi gibi kapalı bir eğri değildir.



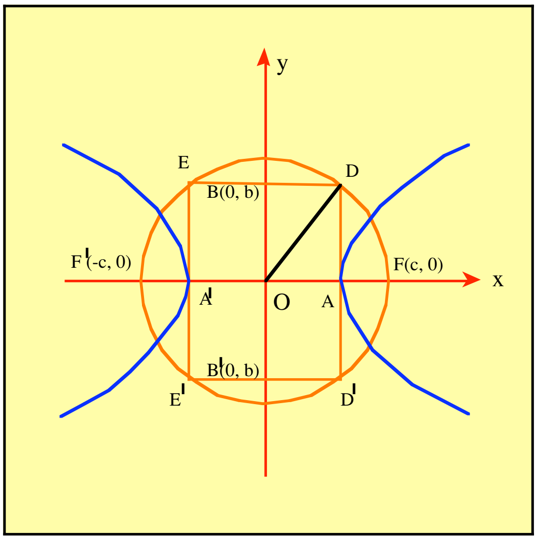
Şekil 1.11

II. Hiperbolün eksenleri ve özel noktaları

Analitik düzlemde, merkezi orijinde ve odakları x ekseni üzerinde olan bir hiperbol çizelim. Bu hiperbolün odakları F ve F´olsun (Şekil 1.12)

a. Asal eksen: x ekseni üzerindeki FF´doğrusuna, hiperbolün odaklar ekseni veya asal eksen denir.

b. Yedek eksen: O noktasından, asal eksene dik olmak üzere çizilen Oy doğrusuna, hiperbolün yedek ekseni denir. Yedek eksen hiperbolü kesmediğinden, bu eksene **sanal eksen** de denir. Bu eksen üzerinde hiperbole ait hiç bir nokta bulunmamaktadır (Şekil 1.12) deki şekli inceleyiniz.



Şekil 1.12

c. Hiperbolün merkezi: FF´doğru parçasının orta noktasına hiperbolün merkezi denir.

d. Hiperbolün köşeleri: Asal eksen ile hiperbolün kesim noktaları olan A ve A´ noktalarına hiperbolün köşeleri denir.

Hiperbolün köşe noktalarının koordinatları,

A(a, 0) ve A´(-a , 0) noktalarıdır. (Şekil 1.12) de,

$$||AF'| - |AF|| = ||AF| - |AF'|| = |AA'| = 2a \text{ dır.}$$
$|OA| = |OA'|$ ve $|AA'| = 2|OA| = 2a$ birim olduğundan, $|OA| = |OA'| = a$ birim olur.

Yedek eksen üzerinde bulunan B ve B´noktalarına hiperbolün yedek eksen köşeleri denir. Yedek eksen uzunluğu |BB´| = 2b birimdir.

Hiperbolün yedek eksen köşelerinin koordinatları: B (0, b) ve B´(0 , -b) noktalarıdır.

e. Hiperbolün odak noktaları: Hiperbolün odak noktaları F ve F´noktalarıdır. |FF´| uzunluğuna, odaklar arası uzunluğu denir. Odaklar arası uzunluğu |FF´| = 2c birim olduğundan, |OF| = |OF´| = c birim olur. Odak noktalarının koordinatları, F (c, 0) ve F´(-c, 0) dır.

(Şekil 1.12) deki DOA dik üçgeninde, Pisagor bağıntısına göre;

$|AD|^2 = |OD|^2 - |OA|^2$ dir. $|AD| = |OB|$ ve $|OD| = |OF|$ olduğundan,
$|OB|^2 = |OF|^2 - |OA|^2$ ve $b^2 = c^2 - a^2$ olur.

f. Merkezil hiperbol: Odakları x ekseni üzerinde ve merkezi orijinde bulunan hiperbole, merkezil hiperbol denir.

Ox ve Oy eksenleri hiperbolün simetri eksenleridir. O noktası (orijin) ise hiperbolün simetri merkezidir.

g. Hiperbolün dış merkezliği: Bir hiperbolde odaklar arası uzaklığın, asal eksen uzunluğuna oranına, hiperbolün dış merkezliği denir. Dış merkezliği e ile gösterirsek;

$$e = \frac{\text{Odaklar arası uzaklık}}{\text{Büyük eksen uzunluğu}} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \text{ dır.} \qquad c > a \text{ olduğundan } e > 1 \text{ dir.}$$

ÖRNEK 13: Asal eksen uzunluğu 6 birim, odaklar arası uzaklığı 10 birim olan ve odakları x ekseni üzerinde bulunan merkezil bir hiperbol veriliyor. Buna göre;

a. Hiperbolün köşelerinin koordinatlarını,

b. Hiperbolün odaklarının koordinatlarını,

c. Hiperbolün yedek eksen uzunluğunu ve yedek eksenin köşelerinin koordinatlarını,

d. Hiperbolün dış merkezliğini bulalım.

e. Verilen hiperbolü analitik düzlemde çizelim.

ÇÖZÜM 13: Verilen hiperbolde ;

a. Asal eksen uzunluğu 6 birim olduğundan,

$2a = 6$ birim ve $a = 3$ birimdir.

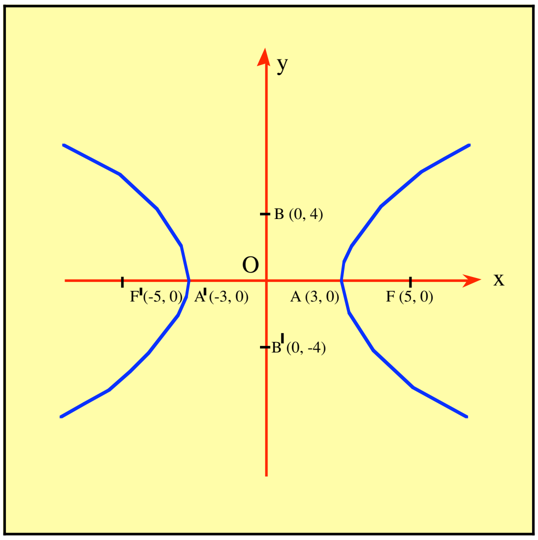
Hiperbolün köşesinin koordinatları:

$A(a, 0) = A(3, 0)$ ve

$A'(-a, 0) = A'(-3, 0)$ olur.

b. Odaklar arası uzaklığı 10 birim olduğundan,

$2c = 10$ birim ve $c = 5$ birimdir.



Şekil 1.13

Hiperbolün odaklarının koordinatları;

$F(c, 0) = F(5, 0)$ ve $F'(-c, 0) = F'(-5, 0)$ olur.

c. Hiperbolün yedek eksen uzunluğunu bulmak için,

$c^2 = a^2 + b^2$ olduğundan, $b^2 = c^2 - a^2$ ve $b^2 = (5)^2 - (3)^2$;

$b^2 = 25 - 9$; $b^2 = 16$ ise, $b = 4$ birimdir.

Hiperbolün yedek eksen uzunluğu: $2b = 2(4) = 8$ birim olur.

Yedek eksenin köşelerinin koordinatları:

$B(0, b) = B(0, 4)$ ve $B'(0, -b) = B'(0, -4)$ olur.

d. Hiperbolün dış merkezliği; $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$ tür.

e. Verilen hiperbol (Şekil 1.13) de çizilmiştir.

ÖRNEK 14

Dış merkezliği 3, yedek eksen uzunluğu $8\sqrt{2}$ birim olan bir hiperbolün asal eksen uzunluğunun kaç birim olduğunun bulalım.

ÇÖZÜM 14

Yedek eksen uzunluğu, $2b = 8\sqrt{2}$ birim olduğundan, $b = 4\sqrt{2}$ birimdir.

Dış merkezliği 3 olduğundan,

$e = \frac{c}{a} = 3$ ise $c = 3a$ dır.

$c^2 = a^2 + b^2$ olduğundan, $(3a)^2 = a^2 + (4\sqrt{2})^2$;

$9a^2 = a^2 + 32$ olur. Buradan, $8a^2 = 32$ ve $a^2 = 4$ ise $a = 2$ birimdir.

O halde, asal eksen uzunluğu, $2a = 2.\ 2 = 4$ birim olur.

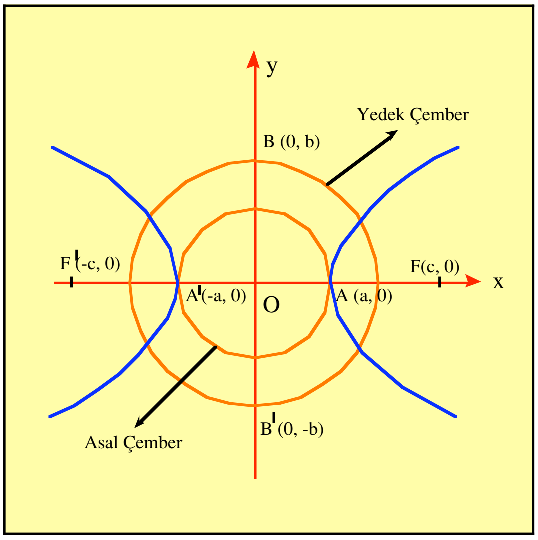
II. Hiperbolün çemberleri

a. Asal çember: Merkezi hiperbolün merkezi ve yarıçap uzunluğu a birim olan çembere hiperbolün asal çemberi denir.

Hiperbolün asal çemberinin denklemi, $x^2 + y^2 = a^2$ dir.

(Şekil 1.14) te çizilmiştir.

b. Yedek çember: Merkezi, hiperbolün merkezi ve yarıçap uzunluğu b birim olan çembere hiperbolün yedek ç e m b e r i denir. Yedek çemberin denklemi, $x^2+ y^2 = b^2$ dir. (Şekil 1.14) te çizilmiştir.



Şekil 1.14

c. Doğrultman çemberi: Merkezi, hiperbolün odaklarından biri ve yarıçap uzunluğu 2a birim olan çembere hiperbolün doğrultman çemberi denir. Bir hiperbolde iki tane doğrultman çemberi vardır. Bunlar ;

1. Merkezi, F' (-c , 0) ve yarıçap uzunluğu 2a birim olan doğrultman çemberin denklemi: $(x +c)^2 + y^2 = 4a^2$ olur.

2. Merkezi, F (c , 0) ve yarıçap uzunluğu 2a birim olan doğrultman çemberin denklemi: $(x - c)^2 + y^2 = 4a^2$ olur.

ÖRNEK 15: Merkezil bir hiperbolün asal eksen uzunluğu 24 birim ve yedek eksen uzunluğu 10 birimdir. Buna göre;

a. Asal çemberinin denklemini,

b. Yedek çemberinin denklemini,

c. Doğrultman çemberlerinin denklemlerini yazalım.

ÇÖZÜM 15

a. Hiperbolün asal çemberinin denklemi, $x^2 + y^2 = a^2$ dır.

Asal eksen uzunluğu 24 birim olduğundan, 2a = 24 birim ise, a = 12 birimdir.

Asal çemberin denklemi, $x^2 + y^2 = 144$ olur.

b. Hiperbolün yedek çemberin denklemi, $x^2 + y^2 = b^2$ dir.

Yedek eksen uzunluğu 10 birim olduğundan 2b = 10 birim ise, b = 5 birimdir.

Yedek çemberin denklemi : $x^2 + y^2 = 25$ olur.

c. Hiperbolün doğrultman çemberlerin denklemlerini yazabilmek için önce, hiperbolün odaklar arası uzunluğunu bulalım: $c^2 = a^2 + b^2$ olduğundan,

$c^2 = (12)^2 + (5)^2 = 144 + 25 = 169$ ise $c = 13$ birim olur.

Hiperbolün doğrultman çemberlerinin denklemleri:

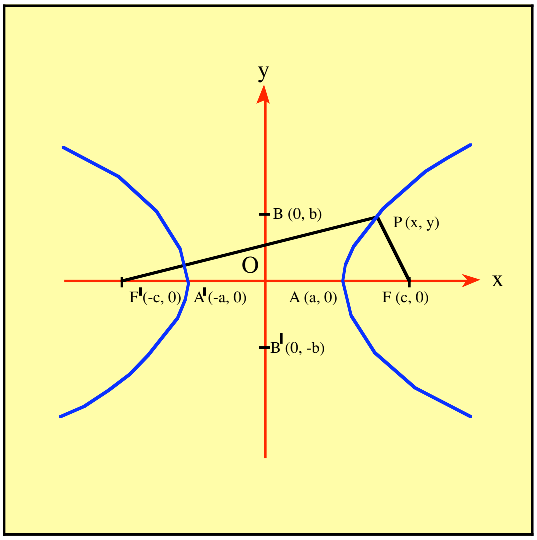
$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2$ ise $(x - 13)^2 + y^2 = 576$ ve
$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2$ ise $(x + 13)^2 + y^2 = 576$ olur.

IV. Merkezil hiperbolün denklemi

a. Odakları x ekseni üzerinde olan hiperboller

Odakları x ekseni üzerinde olan hiperbolün odak noktaları F(c , 0) ve F´(-c , 0) ve asal eksen uzunluğu

$|AA'| = 2a$ birimdir. Merkezil bir hiperbolün üzerinde, değişen bir P(x , y) noktası alalım. (Şekil 1.15) te,



Şekil 1.15

$|PF'| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$

$|PF| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

$|PF'| - |PF| = 2a$ olduğundan değerleri yerlerine yazarsak,

$\left|\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right| = 2a$ olur.

Eşitliğin her iki tarafın karelerini alarak gerekli kısaltmaları yaparsak

$(x + c)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x + c)^2 + y^2} \,.\, \sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2 = 4a^2$

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - 2\sqrt{(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2$

$2x^2 + 2y^2 + 2c^2 - 4a^2 = 2\sqrt{x^4 - 2c^2x^2 + 2x^2y^2 + c^4 + 2c^2y^2 + y^4}$

$x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 = \sqrt{x^4 - 2c^2x^2 + 2x^2y^2 + c^4 + 2c^2y^2 + y^4}$

Her iki tarafın bir daha karelerini alarak gerekli sadeleştirmeleri yaparsak,

$x^4 + y^4 + c^4 + 4a^4 + 2x^2y^2 + 2x^2c^2 - 4x^2a^2 + 2y^2c^2 - 4y^2a^2 - 4c^2a^2$

$= 4x^4 - 2c^2x^2 + 2x^2y^2 + c^4 + 2c^2y^2 + y^4$ sadeleştirme yaparsak,

$4a^4 + 4x^2c^2 - 4x^2a^2 - 4y^2a^2 - 4c^2a^2 = 0$

$a^4 + x^2c^2 - x^2a^2 - y^2a^2 - c^2a^2 = 0$ olur.

c^2 nin yerine, $c^2 = b^2 + a^2$ eşitliği uygulanırsa

$a^4 + x^2(b^2 + a^2) - x^2a^2 - y^2a^2 - (b^2 + a^2)a^2 = 0$

$a^4 + x^2b^2 + x^2a^2 - x^2a^2 - y^2a^2 - b^2a^2 - a^4 = 0$

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ veya $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ olur.

Odakları x ekseni üzerinde, asal eksen uzunluğu 2a birim, yedek eksen uzunluğu 2b birim olan, merkezil bir hiperbolün genel denklemi,

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ veya $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dir.

ÖRNEK 16

Denklemi $25x^2 - 9y^2 = 225$ olan hiperbolün;

a. Eksenlerinin uzunluklarını,

b. Köşelerinin koordinatlarını,

c. Odaklar arası uzunluğunu,

d. Odaklarının koordinatlarını,

e. Dış merkezliğini bulalım.

ÇÖZÜM 16 :

$25x^2 - 9y^2 = 225$ veya $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$ hiperbolünde

a. $a^2 = 9$ ise $a = 3$ birimdir.

Asal eksen uzunluğu : $2a = 2 . 3 = 6$ birim olur.

$b^2 = 25$ ise $b = 5$ birimdir. Yedek eksen uzunluğu: $2b = 2 . 5 = 10$ birim olur.

b. Asal eksen köşeleri: A (a, 0) = A (3 , 0) ve A´(- a, 0) = A´(-3 , 0) olur.

Yedek eksen köşeleri: B (0 , b) = B (0, 5) ve B´(0 , -b) = B´(0 -5) olur.

c. Odaklar arası uzaklığı : $c^2 = a^2 + b^2$ olduğundan,

$c^2 = 3^2 + 5^2$; $c^2 = 9 + 25$; $c^2 = 34$ ise $c = \sqrt{34}$ birimdir.

$2c = 2\sqrt{34}$ birim olur.

d. Odak noktaları x ekseni üzerinde olduğundan,

Odak noktalarının koordinatları $F(c, 0) = F(\sqrt{34}, 0)$ ve $F'(-c, 0) = F'(-\sqrt{34}, 0)$ olur.

e. Dış merkezliği : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{34}}{3}$ olur.

ÖRNEK 17

Merkezil bir hiperbolün odak noktalarının koordinatları F (5 , 0) ve F´(-5 , 0) dır. Bu hiperbol $P(8, 3\sqrt{3})$ noktasından geçtiğine göre, bu hiperbolün denklemini yazalım.

ÇÖZÜM 17

$|PF| = \sqrt{(5-8)^2 + (0-3\sqrt{3})^2}$

$|PF| = \sqrt{(-3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$ birimdir.

$|PF'| = \sqrt{(-5-8)^2 + (0-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{(-13)^2 + (-3\sqrt{3})^2}$

$|PF'| = \sqrt{169+27} = \sqrt{196} = 14$ birimdir.

$|PF'| - |PF| = 14 - 6 = 8$ birimdir.

Hiperbolün asal eksen uzunluğu: $2a = 8$ birim olur.

$2a = 8$ birim ise $a = 4$ birimdir.

Odak noktalarının koordinatları F(5, 0) ve F´(-5 , 0) olduğundan, $c = 5$ birimdir.

Hiperbolün yedek eksen uzunluğunun yarısını bulmak için,

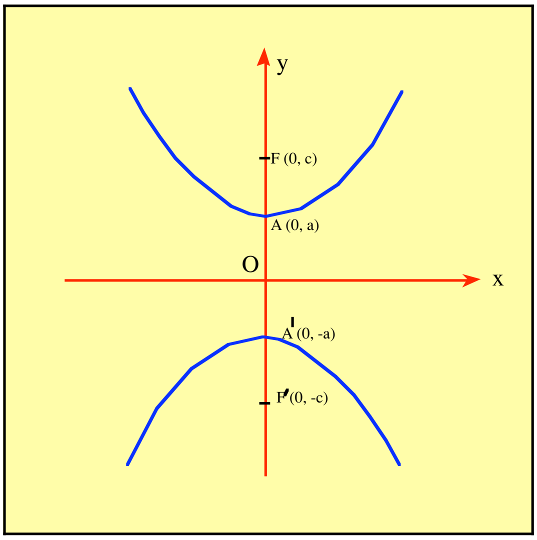
$b^2 = c^2 - a^2$ olduğundan, $b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ ise $b = 3$ birimdir.

Buna göre hiperbolün denklemi, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ olduğundan,

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ veya $9x^2 - 16y^2 = 144$ olur.

b. Odakları y ekseni üzerinde olan hiperboller

Hiperbolün odakları y ekseni üzerinde ise asal eksen y ekseni ile çakışıktır. Hiperbolün kolları x eksenini kesmez. Bu hiperbolün odak noktalarının koordinatları F(0 , c) ve F´(0 , -c) dir. Asal eksen köşeleri: A(0 , a) ve A´(0 , - a) dır. (Şekil 1.16)



Şekil 1.16

Bu durumda $a^2 < b^2$ ise $a < b < c$ ve

$c^2 = a^2 + b^2$dir.

Hiperbolün denklemi $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$

veya

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ olur

ÖRNEK 18: Denklemi $25y^2 - 16x^2 = 400$ olan hiperbolün;

a. Eksenlerinin uzunluklarını,

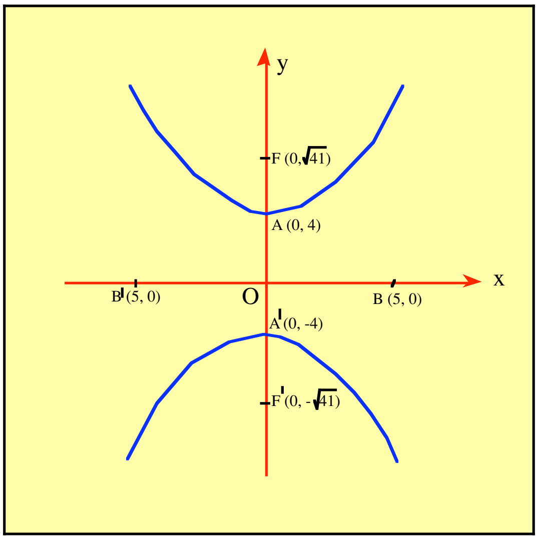
b. Köşesinin koordinatlarını,

c. Odaklar arası uzunluğunu,

d. Odaklarının koordinatlarını,

e. Dış merkezliğini bulalım,

f. Analitik düzlemde çizimini yapalım.



Şekil 1.17

ÇÖZÜM 18

$25y^2 - 16x^2 = 400$ hiperbolünü

$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$ şeklinde yazabiliriz.

Burada a = 4 birim ve b = 5 birimdir.

a. Asal eksen uzunluğu: $2a = 2 \cdot 4 = 8$ birimdir.

Yedek eksen uzunluğu $2b = 2 \cdot 5 = 10$ birimdir.

b. Asal eksen köşeleri: $A(0 , a) = A(0, 4)$ ve $A'(0 - a) = A'(0, -4)$ tür.

Yedek eksen köşeleri : $B(b , 0) = B(5, 0)$ ve $B'(-b, 0) = B'(-5, 0)$ olur.

c. Odaklar arası uzunluğu:

$c^2 = a^2 + b^2$ olduğundan, $c^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$ ise,

$c = \sqrt{41}$ birim ve $2c = 2\sqrt{41}$ birim olur.

d. Odaklarının koordinatları: $F(0, c) = F(0, \sqrt{41})$ ve $F'(0, -c) = F'(0, -\sqrt{41})$ olur.

e. Dış merkezliği: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{41}}{4}$ tür.

f. (Şekil 1.17) de çizimi yapılmıştır.

V. Hiperbol ile bir doğrunun birbirine göre durumları

Denklemi $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ olan merkezil hiperbol ile denklemi $y = mx + n$ olan doğrunun birbirine göre durumlarını incelemek için, bu denklemlerin ortak çözümü yapılır.

Bunun için doğru denklemini hiperbol denkleminde uygularsak;

$$b^2x^2 - a^2(mx + n)^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - a^2(m^2x^2 + 2mnx + n^2) - a^2b^2 = 0$$

$(b^2 - a^2m^2)\, x^2 - 2a^2mnx - a^2n^2 - a^2b^2 = 0$ denklemi elde edilir.

Bu denklemin diskriminantı;

$\Delta = 4m^2n^2a^4 - 4(b^2 - a^2m^2)(-a^2n^2 - a^2b^2)$

$\Delta = 4a^2b^2(n^2 + b^2 - a^2m^2)$ bulunur.

Burada daima $4a^2b^2 > 0$ olduğundan,

a. $n^2 + b^2 - a^2m^2 > 0$ ise doğru hiperbolü farklı iki noktada keser.

b. $n^2 + b^2 - a^2m^2 < 0$ ise doğru ile hiperbol birbirini kesmez. Yani ortak noktaları yoktur.

c. $n^2 + b^2 - a^2m^2 = 0$ ise doğru hiperbole teğettir.
Teğetin değme noktasının koordinatları $P(x_1, y_1)$ ise,

$$x_1 = \frac{2a^2mn}{2(b^2 - a^2m^2)} = \frac{a^2mn}{-n^2} = -\frac{a^2m}{n} \text{ dir.}$$

$$y_1 = \frac{-a^2m^2 + n^2}{n} = -\frac{b^2}{n} \text{ dır. O halde,} \quad P\left(-\frac{a^2m}{n}, -\frac{b^2}{n}\right) \text{ olur.}$$

ÖRNEK 19: Denklemin $x + y - 2 = 0$ olan doğru ile $3x^2 - 4y^2 = 48$ denklemi ile verilen hiperbolün birbirine göre durumlarını inceleyelim. Analitik düzlemde çizimini yapalım.

ÇÖZÜM 19: Denklemi $x+y - 2 = 0$ doğrusu ile $3x^2 - 4y^2 = 48$ denklemi ile verilen hiperbolün ortak çözümünü yapalım, Doğrunun denklemi $y = 2 - x$ olduğundan,

$y = 2 - x$ olduğunda

$3x^2 - 4(2 - x)^2 = 48$

$3x^2 - 4(4 - 4x + x^2) = 48$

$3x^2 - 16 + 16x - 4x^2 - 48 = 0$

$x^2 - 16x + 64 = 0$ denklemi bulunur.

Bu denklemin diskrimantı

$\Delta = 16^2 - 4.64.1$

$\Delta = 256 - 256 = 0$ olur.

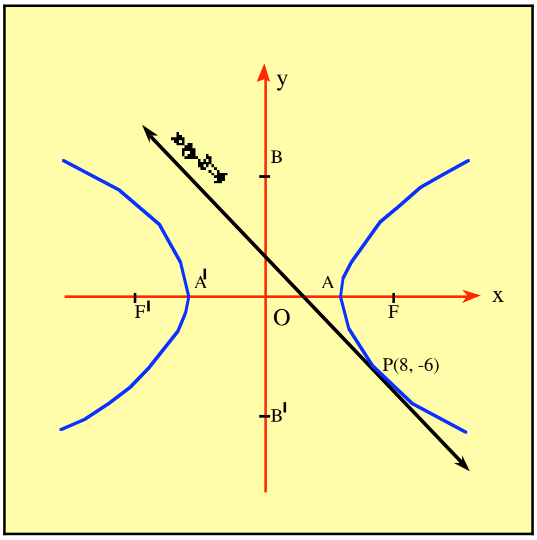
$\Delta = 0$ olduğundan doğru hiperbole teğettir.
Teğetin değme noktasının koordinatları $P(x_1, y_1)$ ise,

$$x_1 = -\frac{a^2m}{n} = -\frac{16.(-1)}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ dir.}$$

$y_1 = 2 - x_1$ den,

$y_1 = 2 - 8$, $y_1 = -6$ dır.

O halde, $P(8, -6)$ olur.



Şekil 1.18

Verilen doğru ve hiperbol (Şekil 1. 18) de çizilmiştir.

ÖRNEK 20 Denklemi $2x^2 - 3y^2 = 71$ olan merkezil hiperbol ile $y = x - 4$ doğrusunun kesim noktalarını bulalım.

ÇÖZÜM 20 Denklemleri verilen hiperbol ile doğrunun kesim noktalarını bulmak için bu denklem sisteminin ortak çözümü yapılır. Buna göre,

$2x^2 - 3(x - 4)^2 = 71$

$2x^2 - 3(x^2 - 8x + 16) - 71 = 0$

$2x^2 - 3x^2 + 24x - 48 - 71 = 0$

$x^2 - 24x + 119 = 0$ denklemi bulunur.

Bu denklemin diskriminantı,

$\Delta = (-24)^2 - 4(1)(119)$

$\Delta = 576 - 476 = 100 = 10^2$

$\Delta > 0$ olduğundan, doğru hiperbolü farklı iki noktada keser.

Kesim noktalarının koorinatlarını bulmak için,

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{24 \pm 10}{2}$ ifadesinden, $x_1 = \dfrac{24 - 10}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$ dir.

$x_2 = \dfrac{24 + 10}{2} = \dfrac{34}{2} = 17$ dir.

Bu değerleri $y = x - 4$ denkleminde uygularsak,

$y_1 = 7 - 4 = 3$ tür. $y_2 = 17 - 4 = 13$ tür.

O halde, kesim noktaları $P(7, 3)$ ve $K(17, 13)$ olur.

VI. Hiperbole üzerindeki bir noktadan çizilen teğet ve normalin denklemleri

a. Teğetin denklemi

Denklemi $bx^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ olan hiperebole, üzerindeki $P(x_1, y_1)$ noktasından çizilen teğetin denklemini yazalım.

Hiperbole çizilen teğetin denklemi $y = mx + n$ olsun. (Şekil 1.19). Bu doğru hiperbol üzerindeki $P(x_1, y_1)$ noktasından geçeceği için $y_1 = mx_1 + n$ olur.

Buradan, $n = y_1 - mx_1$ dir. Bu denklemle,

merkezil hiperbole teğet olma şartı olan $b^2 + n^2 - a^2m^2 = 0$ ifadesinin ortak çözümünü yaparsak,

$b^2 + (y_1 - mx_1)^2 - a^2m^2 = 0$

$b^2 + y_1^2 - 2y_1mx_1 + m^2x_1^2 - a^2m^2 = 0$

$(x_1^2 - a^2)m^2 - 2x_1y_1m + b^2 + y_1^2 = 0$ olur.

$a^2 \neq x_1^2$ ise bu denklem m ye göre ikinci dereceden bir denklemdir. P noktasında, eğrinin farklı iki teğeti olmayacağına göre, bu denklemin kökleri eşit olmalıdır. Buna göre, $\Delta = 0$ olmalıdır. Denklemi buna göre çözersek,

$m = \dfrac{2x_1y_1}{2(x_1^2 - a^2)} = \dfrac{x_1y_1}{x_1^2 - a^2}$ dir. Bu değer teğetin eğimidir.

$$n = y_1 - mx_1 = y_1 - \frac{x_1y_1}{x_1^2 - a^2}x_1 = \frac{x_1^2y_1 - a^2y_1 - x_1^2y_1}{x_1^2 - a^2} = \frac{-a^2y_1}{x_1^2 - a^2} \text{ dir.}$$

$P(x_1 , y_1)$ noktası, hiperbolün üzerinde olduğundan,

$$b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2;$$

$$b^2\left(x_1^2 - a^2\right) = a^2y_1^2$$

$$x_1^2 - a^2 = \frac{a^2y_1^2}{b^2}$$

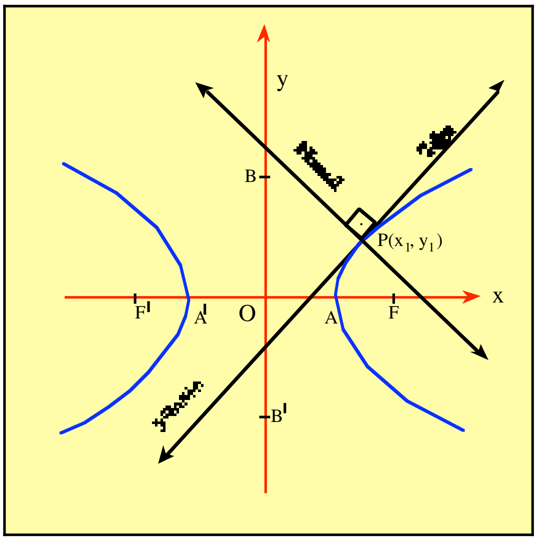
Bu değer m ve n ifadesinde uygulanırsa,

$$m = \frac{x_1y_1}{x_1^2 - a^2} = \frac{x_1y_1}{a^2y_1^2}b^2 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1} \text{ dir.}$$

O halde teğetin denklemi,

$y = m x + n$ olduğundan,

$$y = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}x - \frac{b^2}{y_1} \text{ olur.}$$



Şekil 1.19

Burada gerekli sadeleştirmeleri yaparsak,

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1 \quad \text{veya} \quad b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2 \quad \text{olur.}$$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ denklemi ile verilen hiperbole üzerindeki $P(x_1, y_1)$ noktasından çizilen teğetin denklemi;

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1 \quad \text{veya} \quad b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2 \quad \text{dir.}$$

b. Normalin denklemi

Denklemi $bx^2 - ay^2 = a^2b^2$ olan hiperbole üzerindeki $P(x_1 , y_1)$ noktasından çizilen normalin denklemini yazalım. (Şekil 1.19) daki hiperbolün normali, değme noktasında teğete dik olduğundan $m_T \cdot m_N = -1$ dir.

$$m_T = \frac{b^2x_1}{a^2y_1} \text{ olduğundan,} \quad m_N = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1} \text{ dir.}$$

$$y - y_1 = m_N(x - x_1) \text{ ifadesinden,} \quad y - y_1 = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1) \text{ olur.}$$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ denklemi ile verilen hiperbole üzerindeki $P(x_1, y_1)$ noktasından geçen normalin denklemi ; $y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$ dir.

ÖRNEK 21: Denklemi $2x^2 - 3y^2 = 6$ olan merkezil hiperbole, üzerindeki P (3 , 2) noktasından çizilen teğetin ve normalin denklemini yazalım.

ÇÖZÜM 21: Denklemi $2x^2 - 3y^2 = 6$ olan merkezil hiperbolü,

$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ şeklinde yazabiliriz.

Burada; $a^2 = 3$ ve $b^2 = 2$ dir.

P(3 , 2) noktasından çizilen teğetin denklemi,

$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ olduğundan, $\frac{3x}{3} - \frac{2y}{2} = 1$ dir.

Bu da, $x - y = 1$ veya $y = x - 1$ olur.

Normalin denklemi: $y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$ olduğundan,

$y - 2 = -\frac{3.2}{2.3}(x - 3)$; $y - 2 = -x + 3$; $y = -x + 5$ olur.

ÖRNEK 22: Denklemi $2x^2 - 5y^2 = 30$ olan hiperbolüne üzerindeki P(5, y) noktasından teğet ve normali çiziliyor. $(y > 0)$

a. P noktasının koordinatlarını,

b. P noktasından çizilen teğetin denklemini,

c. P noktasından çizilen normalin denklemini yazalım.

ÇÖZÜM 22: **a.** Verilen P(5 , y) noktası, $2x^2 - 5y^2 = 30$ hiperbolü üzerinde olduğu için, bu denklemi sağlar.

$2.5^2 - 5y^2 = 30$; $50 - 5y^2 = 30$; $5y^2 = 20$

$y^2 = 4$ ise $y = \pm 2$ dir. $y > 0$ olduğundan $y = +2$ alınır.

O halde P (5 , 2) olur.

b. $2x^2 - 5y^2 = 30$ olan merkezil hiperbolü $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$ şeklinde yazabiliriz.

Burada; $a^2 = 15$ ve $b^2 = 6$ dır.

P(5 , 2) noktasından bu hiperbole çizilen teğetin denklemi,

$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 x}{b^2} = 1$ olduğundan, $\frac{5x}{15} - \frac{2y}{6} = 1$ dir.

Bu da, $\frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 1$; $x - y - 3 = 0$ veya $y = x - 3$ olur.

c. Hiperbol üzerindeki P (5 , 2) noktasından, $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$ hiperbolüne

çizilen normalin denklemi, $y - y_1 = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$ olduğundan,

$y - 2 = -\frac{15.\,2}{6.\,5}(x - 5)$; $y - 2 = -x + 5$; $y = -x + 7$ olur.

ÖRNEK 23: $9x^2 - y^2 = 36$ hiperbolünün, $y = 5x + 4$ doğrusuna paralel olan teğetlerinin denklemlerini yazalım.

ÇÖZÜM 23: Denklemi $9x^2 - y^2 = 36$ olan merkezil hiperbolü $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1$ şeklinde yazabiliriz.

Burada; $a^2 = 4$ ve $b^2 = 36$ dır. .

$y = 5x + 4$ doğrusuna paralel olan, hiperbolün teğetinin denklemi $y = mx + n$ olsun. Burada, hiperbolün teğeti, verilen doğruya paralel olacağı için $m = 5$ olmalıdır.

$y = 5x + n$ doğrusunun hiperbole teğet olma şartı olan $b^2 - n^2 - a^2m^2 = 0$ bağıntısından,

$36 + n^2 - 4\,(25) = 0$

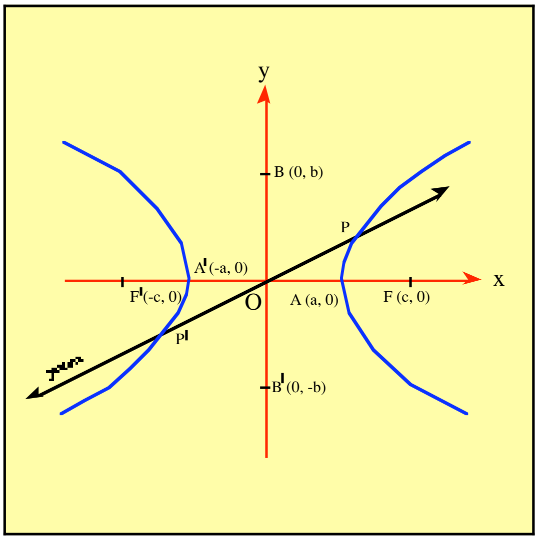
$n^2 - 64 = 0$; $n^2 = 64$; $n = \pm 8$ dir. O halde, teğetlerinin denklemleri: $y = 5x + 8$ ve $y = 5x - 8$ olur.

VII. Hiperebolün köşegenleri

Hiperbolün merkezinden geçen doğrulara hiperbolün köşegenleri denir.

Denklemi $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ olan merkezil hiperbolün köşegen denklemi $y = mx$ şeklindedir. (Şekil 1. 20). Verilen köşegen ile hiperbolün kesim noktalarının koordinatları, $y = mx$ ile $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ denklemlerinin ortak çözümü ile bulunur.

$$b^2x^2 - a^2(mx)^2 = a^2b^2$$
$$b^2x^2 - a^2m^2x^2 = a^2b^2$$
$$x^2\left(b^2 - a^2m^2\right) = a^2b^2$$



Şekil 1.20

$x^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2m^2}$ den $x_1, x_2 = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}$ $\quad y_1, y_2 = m\left(\pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}\right) = \pm \frac{abm}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}$

$y = mx$ köşegeni ile $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ hiperbolünün kesim noktalarının

koordinatları $P\left(\dfrac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}, \dfrac{abm}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}\right)$ ile $P'\left(\dfrac{-ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}, \dfrac{-abm}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}\right)$ olur.

a. $b^2 - a^2m^2 > 0$ ise köşegen hiperbolü keser.

b. $b^2 - a^2m^2 < 0$ ise köşegen hiperbolü kesmez.

c. $b^2 - a^2m^2 = 0$ ise köşegen hiperbolü sonsuzda keser.

Bu durumda köşegen hiperbolün bir asimptotudur.

ÖRNEK 24: $9x^2 - 4y^2 = 16$ denklemi ile verilen merkezil, hiperbol ile $y = x$ köşegen doğrusunun durumunu inceleyelim.

ÇÖZÜM 24: $9x^2 - 4y^2 = 16$ denklemi ile verilen merkezil, hiperbol ile $y = x$ köşegen doğrusunun durumunu incelemek için bu denklemlerinin ortak çözümü yapılır.

$9x^2 - 4(x^2) = 45$; $5x^2 = 45$; $x^2 = 9$ ise $x = \pm 3$ tür.

$y = x$ denkleminden , $y = \pm 3$ olur.

O halde, kesim noktaları $P(3 , 3)$ ve $P'(-3 -3)$ olur.

VIII. Hiperbolün Asimptotları

Bir hiperbol eğrisine sonsuzda teğet olan (değme noktası sonsuzda olan) köşegenlere, hiperbolün asimptotları denir.

$y = mx$ doğrusu (köşegeni) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ hiperbolüne asimptot ise $b^2 - a^2m^2 = 0$ dır.

Buradan, $m^2 = \dfrac{b^2}{a^2}$ ve $m = \pm \dfrac{b}{a}$ olur.

$y = mx$ köşegen denkleminde m yerine $m = \pm \dfrac{b}{a}$ yazılırsa, hiperbolün

asimptotlarının denklemleri: $y = \dfrac{b}{a}x$ ve $y = -\dfrac{b}{a}x$ olur.

Denklemleri $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ veya $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ şeklinde verilen, merkezil hiperbolün asimptotlarının denklemleri;

$y = \dfrac{b}{a}x$ ve $y = -\dfrac{b}{a}x$ olan köşegen doğrularıdır.

ÖRNEK 25: Denklemi, $25x^2 - 9y^2 = 225$ olan merkezil hiperbolün asimptotlarının denklemlerini bulalım.

ÇÖZÜM 25: Denklemi, $25x^2 - 9y^2 = 225$ olan merkezil hiperbolü $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$ şeklinde yazılır. Burada $a^2 = 9$ ise $a = 3$ birimdir ve $b^2 = 25$ ise $b = 5$ birimdir.

Verilen hiperbolün asimptotlarının denklemleri:

$y = \frac{b}{a}x$ olduğundan, $y = \frac{5}{3}x$ ve $y = -\frac{b}{a}x$ olduğundan, $y = -\frac{5}{3}x$ olur.

ÖRNEK 26: Denklemi, $x^2 - 3y^2 = 3$ merkezil hiperbolünün asimptotların Ox ekseni ile pozitif yönde kaç derecelik açı yaptığını bulalım.

ÇÖZÜM 26: Denklemi, $x^2 - 3y^2 = 3$ olan merkezil hiperbolü $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$ şeklinde yazabiliriz.

Burada, $a^2 = 3$ ise $a = \sqrt{3}$ birimdir. $b^2 = 1$ ise $b = 1$ birimdir.
Asimptotlarının denklemleri: $y = \frac{b}{a}x$ ise $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ ve

$y = -\frac{b}{a}x$ ise $y = \frac{-1}{\sqrt{3}}x$ olur.

Pozitif yöndeki açı için asimptotun eğimi, $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$ tür.

$\tan\theta = m = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ise $\theta = 30°$ dir.

Hiperbolün asimptotlarından biri, Ox ekseni ile pozitif yönde 30° açı yapmaktadır.

Negatif yöndeki açı için asimptotun eğimi, $m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ tür.

$\tan\theta = m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ise $\theta = 210°$ dir.

O halde, ikinci asimptot Ox ekseni ile pozitif yönde 210° açı yapmaktadır.

VIII. İkizkenar hiperbol

Asal eksen uzunluğu, yedek eksen uzunluğuna eşit olan hiperbole, ikizkenar hiperbol denir.

İkizkenar hiperebolün özelikleri:

a. $a = b$ olduğundan ikizkenar hiperbolün denklemi $x^2 - y^2 = a^2$ dir.

b. İkizkenar hiperbolün asimptot denklemleri,

$y = x$ ve $y = -x$ tir. Bu asimptotlar birbirine diktir.

c. İkizkenar hiperbolde, $c^2 = 2a^2$ olduğundan, $c = a\sqrt{2}$ dir.

d. İkizkenar hiperbolde, dış merkezlik ; $e = \sqrt{2}$ dir.

e. İkizkenar hiperbol üzerindeki $P(x_1 , y_1)$ noktasından çizilen teğetin denklemi; $x_1 x - y_1 y = a^2$ dir.

ÖRNEK 27: Denklemi $x^2 - y^2 = 9$ olan ikizkenar hiperbolün,

a. Asal eksen ve yedek eksen uzunluğunu,

b. Asal eksen ve yedek eksen köşelerinin koordinatlarını,

c. Odaklar arası uzunluğunu,

d. Odak noktalarının koordinatlarını,

e. Dış merkezliğini,

f. Asimptotların denklemlerini yazalım.

ÇÖZÜM 27: Denklemi $x^2 - y^2 = 9$ olan ikizkenar hiperbolü $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$ şeklinde yazabiliriz. Burada $a^2 = b^2 = 9$ ise $a = b = 3$ birimdir.

a. Asal eksen ve yedek eksen uzunluğu : $2a = 2b = 2.\ 3 = 6$ birimdir.

b. Asal eksen köşeleri : $A (a, 0) = A (3, 0)$ ve $A'(-a , 0) = A'(-3 , 0)$ olur.

Yedek eksen köşeleri : $B (0, b) = B (0, 3)$ ve $B'(0, -b) = B'(0, -3)$ olur.

c. Odaklar arası uzunluğu: $c = a\sqrt{2}$ ise $c = 3\sqrt{2}$ birim olduğundan,

$2c= 2(3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$ birim olur.

d. Odak noktalarının koordinatları:

$F (c , 0) = F (3\sqrt{2},\ 0)$ ve $F' (-c , 0) = F' (-3\sqrt{2},\ 0)$ olur.

e. Dış merkezliği: $e = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$ olur.

f. Asimptotların denklemleri: $y = \pm \frac{b}{a} x$ olduğundan,

$y = x$ ve $y = - x$ olur.

ÖZET

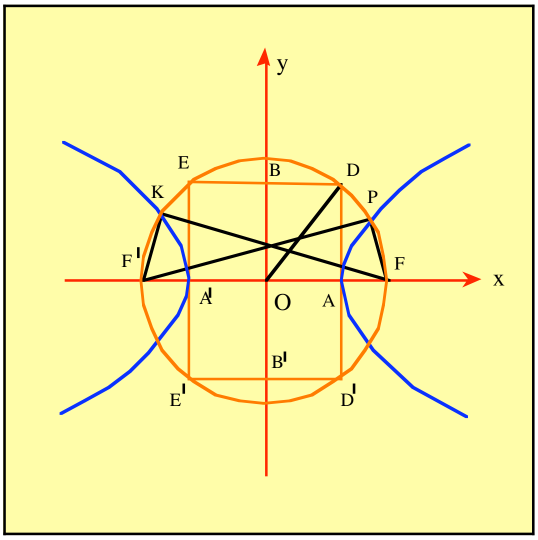
* Düzlemde sabit iki noktaya uzaklıkları farkının mutlak değeri, sabit olan noktaların kümesine **hiperbol** denir. Verilen (Şekil 1.21) e göre;

* Ox ekseni üzerindeki FF´doğrusuna, **hiperbolün odak ekseni** veya **asal eksen** denir.

* O noktasından asal eksene dik olmak üzere çizilen Oy eksenine, **hiperbolün yedek ekseni** (sanal eksen) denir.

*FF´doğru parçasının orta noktasına, **hiperbolün merkezi** denir.

*FF´doğrusu ile hiperbolün kesim noktaları olan A ve A´noktalarına **hiperbolün köşeleri** denir.



Şekil 1.21

* Yedek eksen üzerinde bulunan B ve B´noktalarına, **hiperbolün yedek eksen köşeleri** denir.

*F ve F´noktalarına **hiperbolün odak noktaları,** $|FF'| = 2c$ birim uzunluğuna da **odaklar arası uzaklığı** denir.

* Odakları x ekseni üzerinde ve merkezi orijinde bulunan hiperbole **merkezil hiperbol** denir.

* Bir hiperbolde odaklar arası uzaklığın, asal eksen uzunluğuna oranına **hiperbolün dış merkezliği** denir. $e = \frac{c}{a}$ ve $e > 1$ olur.

* Merkezi, hiperbolün merkezi ve yarıçap uzunluğu a birim olan çembere **hiperbolün asal çemberi** denir. Merkezi, hiperbolün merkezi ve yarıçap uzunluğu b birim olan çembere, **hiperbolün yedek çemberi** denir. Merkezi hiperbolün odaklarından biri ve yarıçap uzunluğu 2a birim olan çembere **hiperbolün doğrultman çemberleri** denir.

* Odakları x ekseni üzerindeki hiperbolün odaklar arası uzunluğu, $|FF'| = 2c$ birim ve asal eksen uzunluğu, $|AA'| = 2a$ birim, yedek eksen uzunluğu, $|BB'| = 2b$ birimdir. Merkezil bir hiperbolün üzerinde değişen bir nokta P(x, y) olsun. Bu hiperbolün genel denklemi, $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ veya $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dir.

*Odakları y ekseni üzerinde olan hiperbolün genel denklemi, $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$ veya $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ dir.

*Denklemi, $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ olan merkezil hiperbol ile denklemi $y = mx + n$ olan doğrunun birbine göre durumunu incelemek için, bu denklemlerin ortak çözümü yapılır. Buna göre;

a. $n^2 + b^2 - a^2m^2 > 0$ ise doğru hiperbolü farklı iki nokta keser.

b. $n^2 + b^2 - a^2m^2 = 0$ ise doğru hiperbole teğettir.

c. $n^2 + b^2 - a^2m^2 < 0$ ise doğru ile hiperbol birbirini kesmez.

* Denklemi, $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ olan hiperbole üzerindeki $P(x_1 , y_1)$ noktasından çizilen teğetin denklemi, $y = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}x - \frac{b^2}{y_1}$ dir. Bu teğet denklemini

$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$ veya $b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2$ şeklinde de yazabiliriz.

Denklemi, $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ olan hiperbole üzerindeki $P(x_1 , y_1)$ noktasından çizilen normalin denklemi, $y - y_1 = \frac{-a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$ dir.

* Hiperbolün merkezinden geçen doğrulara **hiperbolün köşegenleri** denir. Merkezil hiperbolün köşegen denklemi $y = mx$ şeklindedir.

* Bir hiperbol eğrisine sonsuzda teğet olan köşegenlere, **hiperbolün asimptotları** denir. Hiperbolün asimptotlarının denklemi, $y = \pm \frac{b}{a} x$ tir.

* Asal eksen uzunluğu, yedek eksen uzunluğuna eşit olan hiperbole, **ikizkenar hiperbol** denir. İkizkenar hiperbolün denklemi, $x^2-y^2=a^2$'dir

IX. ALIŞTIRMALAR

1. Odak noktaları Ox ekseni üzerinde ve simetri merkezi O noktası olan hiperbolün, asal eksen uzunluğu 2a birim, yedek eksen uzunluğu 2b birim, odaklar arası uzunluğu 2c birimdir.

Aşağıda verilenleri kullanarak hiperbolün denklemlerini yazınız.

a. a= 5 birim ve b = 3 birimdir.

b. a = 12 birim ve c = 13 birimdir.

c. b = 6 birim ve c = 10 birimdir.

d. a = 4 birim ve c = 5 birimdir.

2. Köşelerinin koordinatları A(0, 4) ve A´(0, -4) ile odaklarının koordinatları F (0, 5) ve F´(0, -5) olan hiperbolün denklemini yazınız.

3. Denklemi, $16y^2 - 4x^2 = 64$ olan merkezil hiperbolün;

a. Eksen uzunluklarını,

b. Köşelerinin koordinatlarını,

c. Odaklarının koordinatlarını,

d. Odaklar arası uzunluğunu,

e. Dış merkezliğini,

f. Asimptot denklemlerini yazınız.

4. Odakları Ox ekseninde bulunan bir hiperbolün, asal çemberinin denklemi $x^2+y^2 = 16$, yedek çemberinin denklemi $x^2 +y^2 = 9$ dur. Bu hiperbolün doğrultman çemberlerinin denklemlerini yazınız.

5. Denklemi $x^2 - 4y^2 = 20$ olan hiperbol ile $y = 2x - 10$ doğrusunun kesim noktalarının kordinatlarını bulunuz.

6. Verilen $P_1(3 , 0)$ ve $P_2 (-3 , 0)$ noktalarına olan uzaklıkları farkı 4 olan noktaların geometrik yerini bulunuz.

7. Denklemi $x^2 - 4y^2 = 16$ olan hiperbolün teğetlerinden biri Ox ekseni ile 30° lik bir açı yapmaktadır. Bu teğetini ve değme noktasından geçen normalin denklemini yazınız.

8. Verilen $P\left(1, \sqrt{3}\right)$ noktasından geçen ve asimptotlarından biri $y = 2x$ olan merkezil hiperbolün denklemini yazınız.

9. Odakları F(4 , 0) ve F´(-4, 0) ve dış merkezliği 2 olan hiperbolün, P (x , 2) noktasındaki teğet ve normalin denklemini yazınız ($x > 0$ dır)

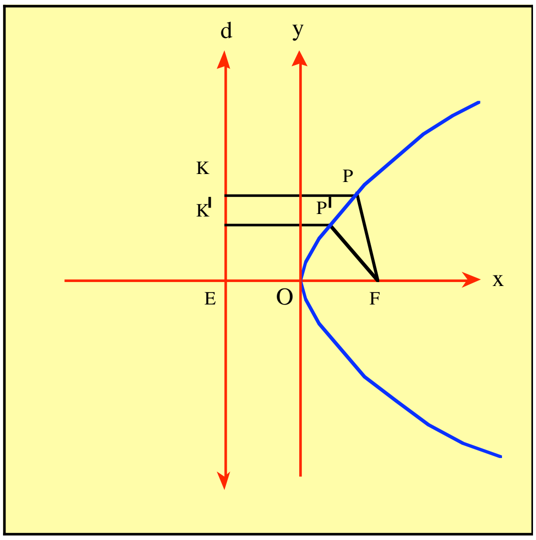
10. Denklemi $4x^2 -y^2 = 8$ olan hiperbol ile denklemi, $x - y = 2$ olan doğrunun kesim noktaları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

4. PARABOL

I. Tanımlar

Düzlemde sabit bir F noktasına ve bu noktadan geçmeyen sabit bir d doğrusuna, uzaklıkları birbirine eşit olan noktaların geometrik yerine parabol denir.

Şekil 1. 22’ de, O, P´ve P noktaları parabole ait birer nokta olduğundan |OF| = |OE|, |P´F| = |P´K´| ve |FP| = |PK| olur.



Şekil 1.22

II. Parabolün eksenleri ve özel noktaları

a. Parabolün odağı: Parabolde, sabit F noktasına parabolün odağı denir.

b. Parabolün doğrultmanı: Paraboldeki sabit d doğrusuna, parabolün doğrultman doğrusu denir.

c. Parabolün ekseni: Parabolün odak noktasından geçen ve doğrultman doğrusuna dik olan doğruya, parabolün ekseni denir.

d. Parabolün tepesi: Parabol ile eksenin kesiştiği noktaya, parabolün tepesi (köşesi) denir.

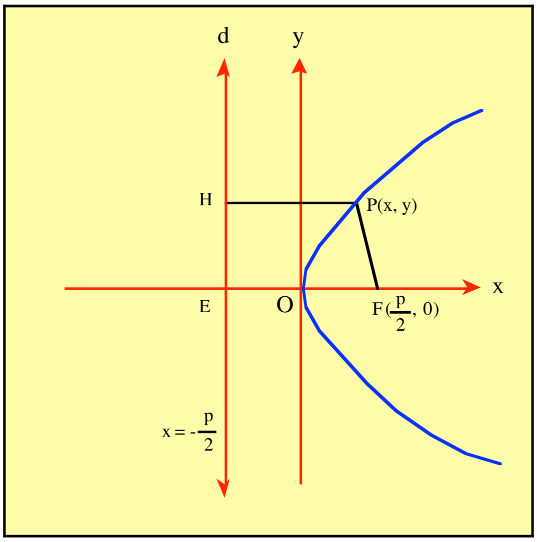
e. Parabolün parametresi: Odak noktasının doğrultman doğrusuna olan uzaklığına, parabolün parametresi denir. Bu uzaklık p ile gösterilir (Şekil 1.22) de |EF| ⊥ d ve |EF| = p dir. O noktası EF doğru parçasının orta noktası olduğundan, $|OE| = |OF| = \frac{p}{2}$ olur.

f. Parabolün dış merkezliği: Parabol üzerindeki her noktanın, F odak noktasına (sabit noktaya) ve doğrultman d doğrusuna (sabit doğruya) olan uzaklıkları oranına, parabolin dış merkezliği denir. Dış merkezlik e ile göserilir. Parabol üzerinde herhangi bir nokta P olsun (şekil 5.21). Bu noktanın, F odak noktasına uzaklığı |PF|, doğrultman d doğrusuna olan uzaklığı |PK| ise $e = \frac{|PK|}{|PF|}$ dir. |FK| = |PF| olduğundan, e = 1 olur.

III. Merkezil parabolün denklemi

a. Simetri ekseni x ekseni, tepe noktası orijin noktası olan merkezil parabolün denklemi

Merkezil bir parabolün, F odağı ile d doğrultman doğrusu verilsin. Bu parabolün simetri eksenini x ekseni olarak alalım. Bu eksene, O tepe noktasından çıkılan dik doğru da y ekseni olsun (Şekil 1.23). Parabolün parametresinin tanımından $|FE| = p$ ise $|OF| = |OE| = \frac{p}{2}$ olur.



Şekil 1.23

Bu duruma göre, F odak noktasının koordinatları $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ve d doğrultman doğrusunun denklemi $x = -\frac{p}{2}$ olur.

Parabol üzerinde değişken bir nokta P(x , y) olsun

$$|PF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$|PH| = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| \text{ dir.}$$

$|PF| = |PH|$ olduğundan,

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| \text{ olur.}$$

Her iki tarafın karesini alarak gerekli sadeleştirmeleri yaparsak,

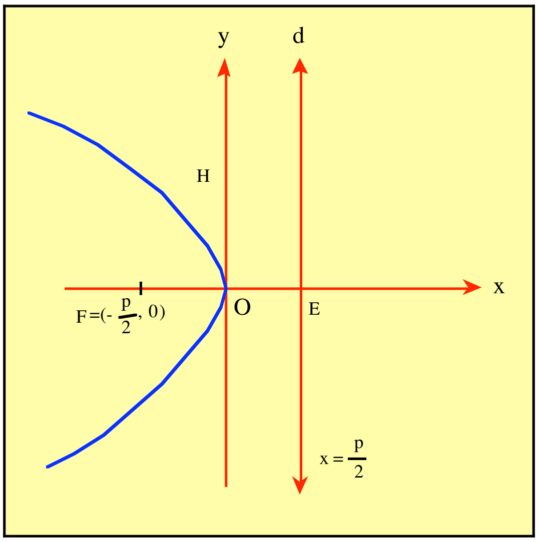
$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \text{ veya}$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$y^2 = 2px$ olur. (Şekil 5.23)

I. Simetri ekseni x ekseni olan ve tepesi orijinde bulunan, $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ odaklı parabolün denklemi $y^2 = 2px$ olur. (Şekil 1.23) de çizilmiştir.

II. Simetri ekseni x ekseni, tepesi orijinde bulunan, odak noktasının koordinatları ve doğrultman doğrusu, $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ olan parabolün denklemi $y^2 = -2px$ olur. Grafiği (Şekil 1.24) de çizilmiştir.

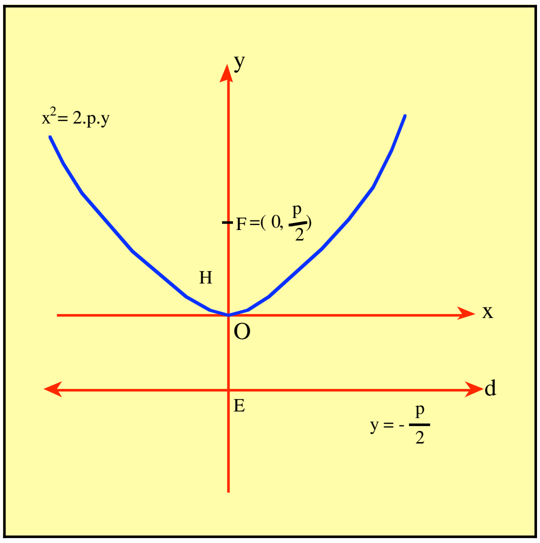


Şekil 1.24

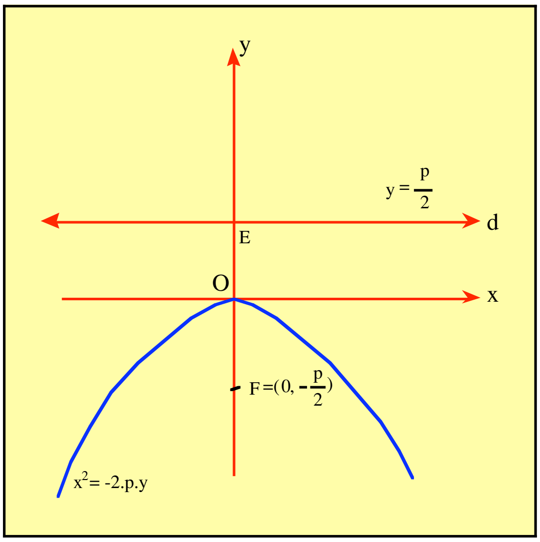
b. Simetri ekseni y ekseni, tepe oktası orijin noktası olan merkezil parabolün denklemi

I. Simetri ekseni y ekseni, tepesi orijinde bulunan, odak noktasının koordinatları $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ ve doğrultman doğrusu $y = -\frac{p}{2}$ olan parabolün denklemi $x^2 = 2py$ olur. Grafiği (Şekil 1.25) de çizilmiştir.

II. Simetri ekseni y ekseni, tepesi orijinde bulunan, odak noktasının koordinatları $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$ ve doğrultman doğrusu $y = \frac{p}{2}$ olan parabolün denklemi $x^2 = -2py$ olur. Grafiği (Şekil 1.26) de çizilmiştir.



Şekil 1.25



Şekil 1.26

Bir merkezil parabol denkleminde, x değişkeni birinci dereceden ise simetri ekseni x ekseni, y değişkeni birinci dereceden ise simetri ekseni y eksenidir.

ÖRNEK 28: Bir merkezil parabolün doğrultman doğrusu x = -2 ve simetri ekseni Ox eksenidir. Tepe noktası orijin olan bu parabolün odak noktasının koordinatlarını bulalım. Bu parabolün denklemini yazalım.

ÇÖZÜM 28: Verilen parabolün doğrultman doğrusu x = -2 simetri ekseni Ox ekseni ve tepe noktası orijin olduğu için $x = -\frac{p}{2}$ ifadesinden, $-2 = -\frac{p}{2}$ ise $p = 4$ olur.

Odak noktasının koordinatları F(2, 0) dır. Parabolün denklemi $y^2 = 2px$ olduğundan, $y^2 = 2\,(4)\,x$; $y^2 = 8x$ olur.

ÖRNEK 29: Bir perabolün simetri ekseni 0x eksenidir. P(1, 2) noktasından geçen, bu merkezil parabolün denklemini yazalım.

ÇÖZÜM 29: Verilen merkezil parabol 0x eksenine göre simetrik olduğundan, denklemi, $y^2 = 2px$ dir. Bu parabol P(1, 2) noktasından geçtiği için P(1, 2) noktası merkezil parabolün denklemini sağlar.

$y^2 = 2px$

$2^2 = 2\,p.1$; $2p = 4$ ise $p = 2$ olur.

O halde istenilen parabolün denklemi;

$y^2 = 4x$ olur.

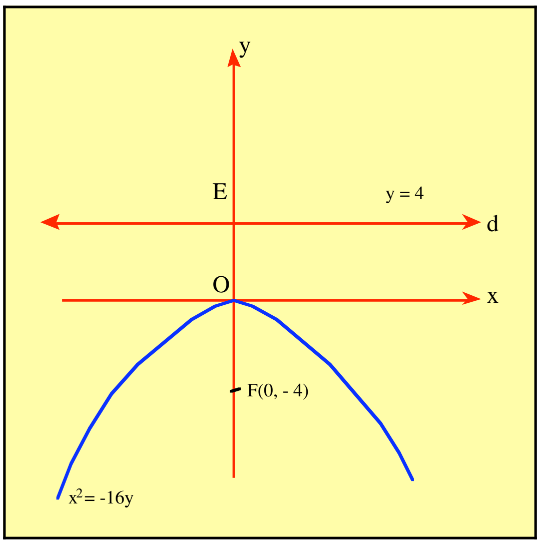
ÖRNEK 30: Doğrultman doğrusu y = 4 olan tepesi orijinde bulunan ve odağının koordinatları F(0,-4) olan parabolün denklemini yazalım. Koordinat düzleminde grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM 30: Parabolün doğrultman doğrusunun denklemi

$y = \frac{p}{2}$ olduğundan, $\frac{p}{2} = 4$ ise

$p = 8$ olur. $x^2 = -2py$ den $x^2 = -16\,y$ olur.

Parabolün grafiği (Şekil 1.27) de çizilmiştir.



Şekil 1.27

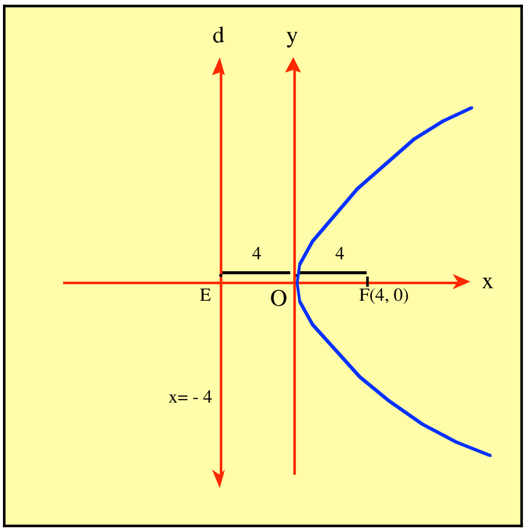
ÖRNEK 31: Tepe noktası orijin ve odak noktasının koordinatları F(4, 0) olan parabolün denklemini yazalım. Bu parabolün grafiğini koordinat düzleminde çizelim.

ÇÖZÜM 31: Tepe noktası orijin ve odak noktasının koordinatları F(4, 0) olduğundan, $p = |EF| = 4 + 4 = 8$ dir.

Parabolün denklemi, $y^2 = 2px$ olduğundan,

$y^2 = 2.8\,x$ ise $y^2 = 16x$ olur.

(Şekil 1.28) de, parabolün grafiği çizilmiştir.



Şekil 1.28

ÖRNEK 32: Köşesi orijin, doğrultman doğrusunun denklemi x = 2 olan parabol, P(-2, y) noktasından geçmektedir. Buna göre parabolün denklemini yazalım. Bu parabol üzerindeki p noktasının ordinatı olan y nin değerinin kaç olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM 32: Köşesi orijin ve doğrultman doğrusu Oy eksenine paralel olan parabolün denklemi $y^2 = -2px$ dir.

Doğrultman doğrusunun denklemi $x = \frac{p}{2} = 2$ ise $p = 4$ olur.

Parabolün denklemi $y^2 = -2px$ olduğundan, $y^2 = -8x$ olur.

P noktası parabol üzerinde olacağından P noktasının koordinatları parabol denklemini sağlar. Buna göre, $y^2 = -8(-2) = 16$ ise $y = \pm 4$ tür.

O halde, $y_1 = -4$ ve $y_2 = +4$ olur.

ÖRNEK 33: Denklemi x = -3 olan doğruya ve F(3, 0) noktasına eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerini bulalım.

ÇÖZÜM 33

Geometrik yere ait nokta P(x, y) olsun. (Şekil 1. 29) göre, $|PH| \perp d$ ve $|PH| = |PF|$ dir.

$|PF| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2}$

$|PH| = x + 3$ olduğundan,

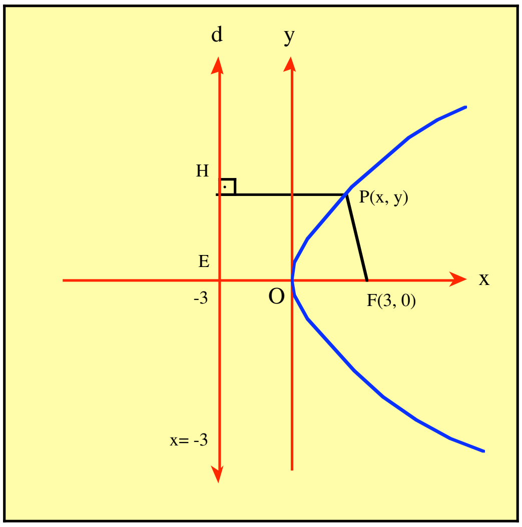
$\sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2} = x + 3$ olur.

Her iki tarafın karesini alır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 + 6x + 9$

$y^2 = 12x$ olur.

Buna göre, geometrik yer bir paraboldür.



Şekil 1.29

IV. Parabol ile bir doğrunun birbirine göre durumları

Denklemi $y^2 = 2px$ olan merkezil parabol ile denklemi $y = mx + n$ olan doğrunun birbirine göre durumlarını incelemek için bu denklemlerin ortak çözümü yapılır (Şekil 1.30).

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 2px \\ y = mx + n \end{array}\right\} \text{ denklem sistemini çözersek}$$

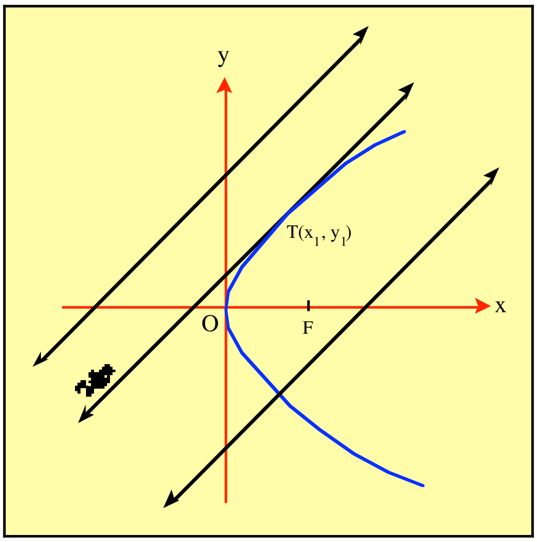
$$(mx + n)^2 = 2px$$

$$m^2x^2 + 2mnx + n^2 - 2px = 0$$
$$m^2x^2 + (2mn - 2p)\,x + n^2 = 0$$

Bu denklemin diskriminantı,

$$\Delta = (2mn - 2p)^2 - 4 .\ m^2 .\ n^2$$
$$\Delta = 4m^2n^2 - 8\ mnp + 4p^2 - 4m^2n^2$$

$\Delta = 4p^2 - 8mnp$ olarak bulunur.



Şekil 1.30

a. $4p^2 - 8\ mnp > 0$ ise doğru parabolü iki noktada keser.
b. $4p^2 - 8\ mnp < 0$ ise doğru parabolü kesmez.
c. $4p^2 - 8\ mnp = 0$ ise doğru parabole teğettir.

$y^2 = 2px$ parabolü $y = mx + n$ doğrusuna teğet ise $4p^2 - 8mnp = 0$
$4p\,(p - 2mn) = 0$ dır.
$p \neq 0$ olduğundan, $p - 2mn = 0$ ve
$p = 2mn$ olur.
Buna teğet olma şartı veya değme şartı denir.

Denklemi $y = mx + n$ olan doğrunun, denklemi $y^2 = 2px$ olan parabole T noktasında teğet ise, T değme noktasının koordinatları $T\,(x_1, y_1)$ olsun. Buna göre;

$$x_1 = \frac{-(2mn - 2p)}{2m^2} = \frac{-2mn + 4mn}{2m^2} = \frac{2mn}{2m^2} = \frac{n}{m} \text{ dir.}$$

$y_1 = mx_1 + n$ ise $y_1 = m\frac{n}{m} + n = n + n = 2n$ dir.

T değme noktasının koordinatları $T\left(\frac{n}{m}, 2n\right)$ olur.

ÖRNEK 34: Denklemi $y = \frac{3}{2}x^2$ olan parabol ile denklemi $y = 2x + 2$ doğrusunun birbirine göre durumunu inceleyelim. Verilen doğru parabolü kesiyor ise kesim noktalarını bulalım.

ÇÖZÜM 34: Denklemi $y = \frac{3}{2}x^2$ olan parabol ile denklemi $y = 2x + 2$ doğrusunun birbirine göre durumlarını incelemek için bu denklemlerin ortak çözümü yapılır.

Buna göre, $2x+2 = \frac{3}{2}x^2$ dir.

Bu denklemini sadeleştirirsek, $3x^2 - 4x - 4 = 0$ olur.
Bu denklemin diskriminantı,

$\Delta = 4^2 - 4.3\,(-4)$
$\Delta = 16 + 48 = 64 = 8^2$
$\Delta > 0$ olduğundan doğru parabolü keser.
Kesim noktalarının koordinatlarını bulmak için;

$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 8}{6}$ den $x_1 = \frac{4+8}{6} = \frac{12}{6} = 2$ dir.

$x_2 = \frac{4-8}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$ tür.

$y = 2x + 2$ denkleminden $y_1 = 2.2 + 2 = 4 + 2 = 6$ dır.

$y_2 = 2\left(-\frac{2}{3}\right) + 2 = -\frac{4}{3} + \frac{6}{3} = \frac{2}{3}$ tür.

O halde, verilen parabol ile doğrunun kesim noktalarının koordinatları
$P_1(2, 6)$ ve $P_2\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ olur.

V. Parabole üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin ve normalin denklemi

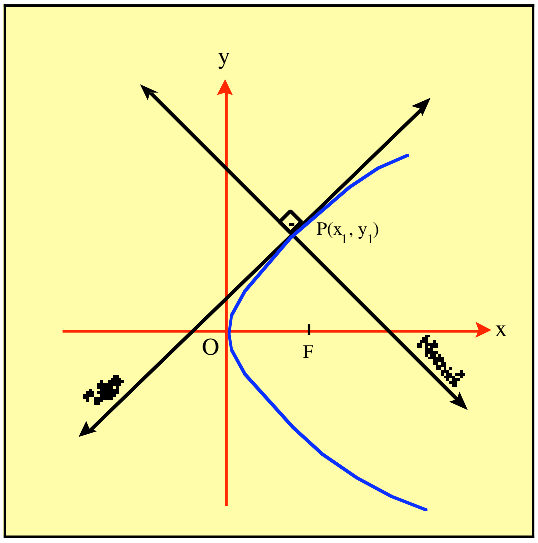
a. Teğetin denklemi

Denklemi $y^2 = 2px$ olan parabol üzerindeki $P(x_1, y_1)$ noktasından çizilen teğetin denklemini yazalım (Şekil 1.31)

Parabole çizilen teğetin denklemi $y = mx + n$ olsun. Bu doğru parabol üzerindeki $P(x_1, y_1)$ noktasından geçeceği için $y_1 = mx_1 + n$ olur. Buradan, $n = y_1 - mx_1$ dir.

$p = 2mn$ parabole teğet olma şartı ile ortak çözümünü yaparsak;

$p = 2m(y_1 - mx_1)$ dir. Bu eşitliği düzenlersek, $2m^2x_1 - 2my_1 + p = 0$ olur.



Şekil 1.31

Bu denklem, m ye göre ikinci dereceden bir denklemdir. P noktasında, parabolün farklı iki teğeti olmayacağına göre, bu denklemin kökleri eşit olmalıdır. Buna göre $\Delta = 0$ olmalıdır. Denklemi buna göre çözersek,

$m = \dfrac{2y_1}{2.2x_1} = \dfrac{y_1}{2x_1}$ dir. Bu değer teğetin eğimidir.

$n = y_1 - mx_1 - y_1 = y_1 - \dfrac{y_1}{2x_1} x_1 = y_1 - \dfrac{y_1}{2} = \dfrac{y_1}{2}$ dir.

Bu değerler $y = mx + n$ denkleminde uygularsak,

$y = \dfrac{y_1}{2x_1} x + \dfrac{y_1}{2}$ den, $2x_1 y = y_1 (x + x_1)$ bulunur.

Eşitliğin her iki tarafı y_1 ile çarpılırsa,

$y_1(2x_1 y) = y_1 [\, y_1(x + x_1)] \,;\quad 2x_1 y_1 y = y_1^2(x + x_1)$

y_1^2 yerine eşiti olan $2px_1$ yazılırsa, $2x_1 y_1 y = 2px_1 (x + x_1)$ olur.

Buradan, $y_1 y = p(x + x_1)$ elde edilir.

Denklemi $y^2 = 2px$ olan parabole üzerindeki $P(x_1, y_1)$ noktasından çizilen teğetin denklemi $y_1 . y = p(x + x_1)$ dir.

b. Normalin denklemi:

Denklemi $y^2 = 2px$ olan parabole üzerindeki $P(x_1, y_1)$ noktasından çizilen normalin denklemini yazalım (Şekil 1.30)

Denklemi $y^2 = 2px$ olan parabole üzerindeki $P(x_1, y_1)$ noktasından çizilen teğet denkleminin eğimi

$m_T = \dfrac{y_1}{2x_1}$ olduğundan, normal denkleminin eğimi $m_N = \dfrac{-2x_1}{y_1}$ dir.

Buna göre, parabolün $P(x_1, y_1)$ noktasındaki normalinin denklemi

$y - y_1 = -\dfrac{2x_1}{y_1}(x - x_1)$ dir.

P noktası parabol üzerinde olduğu için,

$y_1^2 = 2px_1$ ise $2x_1 = \dfrac{y_1^2}{p}$ dir. Bu değer yerine yazılırsa normalin denklemi

$y - y_1 = -\dfrac{y_1}{p}(x - x_1)$ olarak bulunur.

Denklemi $y^2 = 2px$ olan parabole üzerindeki $P(x_1, y_1)$ noktasından çizilen normalin denklemi $y - y_1 = -\dfrac{y_1}{p}(x - x_1)$ dir.

Simetri ekseni y ekseni ve tepe noktası orijinde olan, denklemi $x^2 = 2py$ olan merkezil parabolün, üzerindeki $P(x_1 , y_1)$ noktasında çizilen teğet denklemi : $x_1x = p(y + y_1)$ dir. Normalin denklemi : $\mathbf{x - x_1 = -\frac{x_1}{p}(y - y_1)}$ **dir.**

ÖRNEK 35: Denklemi, $y^2 = 4x$ olan parabole, $P(1 , 2)$ noktasından çizilen teğetin ve normalin denklemini yazalım.

ÇÖZÜM 35: $P(1 , 2)$ noktası için, $(2)^2 = 4(1)$ ve $4 = 4$ olduğundan,

P noktası parabol üzerindedir.
Teğetin denklemi: $y_1 y = p(x + x_1)$ ifadesinden $2y = 2(x + 1)$;
$2y = 2x + 2$ veya $y = x + 1$ olur.
Teğetin eğimi $m_T = 1$ olduğundan, normalin eğimi $m_N = -1$ dir.
Normalin denklemi : $y - y_1 = m_N (x - x_1)$ olduğundan,
$y - 2 = -1(x - 1)$; $y - 2 = -x + 1$; $y = -x + 3$ olur.

ÖRNEK 36: Denklemi, $y^2 = -8x$ olan parabolün, denklemi $y = x + 3$ doğrusuna paralel olan teğetin denklemini yazalım.

ÇÖZÜM 36: $y^2 = -8x$ parabolünde $p = -4$ tür.

Verilen $y = x + 3$ doğrusuna paralel teğetin eğimi $m_T = 1$ dir.

Teğetin değme şartı olan $p = 2mn$ denkleminde uygulanırsa, $-4 = 2.1.n$ olur. Buradan, $n = -2$ bulunur.

Teğetin denklemi, $y = x - 2$ olur.

ÖRNEK 37: $x^2 = 4y$ denklemi ile verilen parabolün üzerindeki $P(x,4)$ noktasındaki teğet ve normalin denklemini yazalım. $(x > 0$ olacak$)$

ÇÖZÜM 37: $P(x , 4)$ noktası $x^2 = 4y$ denklemi ile verilen parabolün üzerinde olduğundan bu denklemi sağlar. $x^2 = 4.4$; $x^2 = 16$ ise $x = \pm 4$ olur.

$x > 0$ olduğundan, $x = 4$ ve $P(4, 4)$ tür.

Teğetin denklemi : $x_1 x = p(y + y_1)$ olduğundan,

$4x = 2(y + 4)$; $4x = 2y + 8$; $y = 2x - 4$ olur.

Normalin denklemi: $x - x_1 = -\frac{x_1}{p}(y - y_1)$ olduğundan,

$x - 4 = -\frac{4}{2}(y - 4)$; $x - 4 = -2y + 8$; $x + 2y - 12 = 0$ olur.

ÖZET

*Düzlemde, sabit bir F noktasına ve bu noktadan geçmeyen sabit bir d doğrusuna, uzaklıkları birbirine eşit olan noktaların geometrik yerine **parabol** denir. (Şekil 1.32)

*Sabit F noktasına, **parabolün odağı** denir.

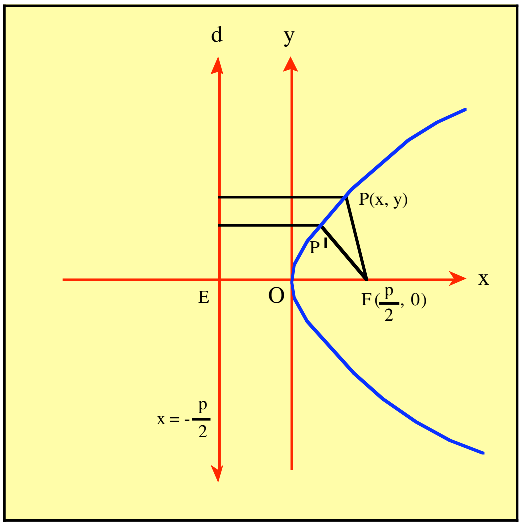
*Sabit d doğrusuna, **parabolün doğrultman doğrusu** denir.

*Parabolün odak noktasından geçen ve doğrultman doğrusuna dik olan doğruya, **parabolün ekseni** denir.

*Parabol ile eksenin kesiştiği noktaya, **parabolün tepesi** denir.

*Odak noktasının doğrultman doğrusuna olan uzaklığına **parabolün parametresi** denir.

$$|OE| = |OF| = \frac{p}{2} \text{ dir.}$$



Şekil 1.32

*Parabol üzerindeki her noktanın, F noktasına ve doğrultman d doğrusuna olan uzaklıkları oranına, **parabolün dış merkezliği** denir.

*Simetri ekseni x ekseni, tepe noktası orijin noktası olan merkezil parabolün denklemi $y^2 = 2px$ tir. Simetri ekseni y ekseni, tepe noktası orijin noktası olan merkezil parabolün denklemi $x^2 = 2py$ dir.

*Denklemi $y^2 = 2px$ olan merkezil parabol ile denklemi $y = mx + n$ olan doğrunun birbirine göre durumlarını incelemek için bu denklemlerin ortak çözümü yapılır. Buna göre;

a. $4p^2 - 8mnp > 0$ ise doğru parabolü keser.

b. $4p^2 - 8mnp = 0$ ise doğru parabole teğettir.

c. $4p^2 - 8mnp < 0$ ise doğru parabolü kesmez.

*Denklemi $y^2 = 2px$ olan parabolün üzerindeki $P(x_1, y_1)$ noktasından çizilen teğetin denklemi $y_1 y = p(x + x_1)$ dir.

*Denklemi $y^2 = 2px$ olan parabolün üzerindeki $P(x_1, y_1)$ noktasından çizilen normalin denklemi, $y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$ dir.

VII. ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda denklemleri verilen parabollerin, odaklarının koordinatlarını, parametrelerinin uzunluğunu, doğrultman doğrusunun denklemlerini yazınız.

   a. $y^2 = 8x$ **b.** $y^2 = 4x$

   c. $x^2 = 14y$ **d.** $2y^2 - 5x = 0$

2. Tepe noktası orijinde olan ve odağının koordinatları verilen parabollerin denklemlerini yazınız.

   a. F(5 , 0) **b.** F (-3 0)

   c. F(0, 4) **d.** F(0, -2)

3. Denklemi, $y^2 = 8x$ olan parabole üzerindeki P(-2 , 4) noktasından çizilen teğetin ve normalin denklemini yazınız.

4. Denklemi, $y^2 = 4x$ olan parabolün denklemi $y = x +1$ olan doğruya en yakın olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

5. Denklemi, $y^2 =12x$ olan parabolün $y = x -5$ doğrusuna paralel olan teğetlerinin denklemini ve değme noktasının koordinatlarını bulunuz.

6. P(2, 4) noktasından geçen ve doğrutman doğrusunun denklemi $x = -2$ olan parabolün denklemini yazınız.

7. Denklemi, $y^2 = 8x$ olan parabolün odağından geçen en kısa kirişinin uzunluğunu bulunuz.

8. Denklemi, $y^2 = 2px$ olan parabolün, $y = mx + n$ doğrusuna teğet olması için m, n, p değerleri arasında nasıl bir bağıntı olmalıdır?

9. Denklemi, $y^2 = 4x$ olan parabolün, bir kirişinin orta noktası M(2 , 1) ise bu kirişin denklemini yazınız.

10. Denklemi, $y^2 = 12x$ olan parabolün, orijinden geçen kirişlerinin orta noktalarının geometrik yerini bulunuz.

TEST I

1. Denklemi $16x^2 + 25y^2 = 400$ olan elipsin, odaklar arası uzaklığı kaç birimdir?

A) 3 B) 6 C) 8 D) 10

2. Denklemi $4x^2 + 9y^2 = 36$ olan elipsin, dış merkezliği aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C) $\sqrt{5}$ D 5

3. F´ (-3 , 0) ve F(3 , 0) noktalarına uzaklıkları toplamı 10 birim olan noktaların kümesinin denklemi, aşağıdakilerden hangisidir?

A) $16x^2 + 25y^2 = 400$ B) $x^2 + y^2 = 9$

C) $25x^2 - 16y^2 = 400$ D) $y^2 = 10x$

4. Denklemi, $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ olan elipse üzerindeki P(x , 2) noktasından çizilen teğetin denklemi, aşağıdakilerden hangisidir? (x > 0 alınız.)

A) $3x + 2y - 5 = 0$ B) $x + 2y + 3 = 0$

C) $2x + 3y - 12 = 0$ D) $2x - 3y - 1 = 0$

5. Denklemi $y = \sqrt{3}\,x + n$ olan doğru, denklemi $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ olan elipse teğet ise n nin değeri aşağıdakilerden hangisidir? (n > 0)

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

6. Denklemi $4x^2 + 9y^2 = 36$ olan elipsin parametrik denklemleri aşağıdakilerden-den hangisidir?

A) $x = 3 \cos\theta$, $y = 2 \sin\theta$ B) $x = 2\cos\theta$, $y = 3 \sin\theta$

C) $x = 3 \sin\theta$, $y = 2 \cos\theta$ D) $x = 2 \sin\theta$, $y = 3 \cos\theta$

7. Denklemi $9x^2 + 16y^2 = 144$ olan elipse, köşeleri elips üzerinde bulunan bir kare çiziliyor. Bu karenin bir kenarının uzunluğu kaç birimdir?

A) 4 B) 3 C) $\frac{12}{5}$ D) $\frac{12}{7}$

8. Denklemi $2x^2 + 3y^2 = 14$ olan elipse, üzerindeki P (1, 2) noktasından çizilen normalin denklemi, aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = x + 1$ B) $y = 2x - 3$ C) $y = 3x - 5$ D) $y = 3x - 1$

9. Doğrultman çemberlerinden birinin denklemi $(x - 3)^2 + y^2 = 100$ olan elipsin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $16x^2 + 25y^2 = 400$ B) $9x^2 + 25y^2 = 225$

C) $4x^2 + 9y^2 = 36$ D) $25x^2 + 36y^2 = 900$

10. $x = 5 \cos \theta$ ve $y = 4 \sin \theta$ parametrik denkleminin gösterdiği eğri aşağıdakilerden hangisidir?

A) çember B) elips C) hiperbol D) parabol

11. Merkezi orijinde, asal ekseni x ekseni olan, (8, 5) ve (4, 1) noktalarından geçen hiperbolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $14x^2 + 7y^2 = 98$ B) $64x^2 - 16y^2 = 1024$

C) $7x^2 - 14y^2 = 98$ D) $16x^2 - 64y^2 = 1024$

12. $x^2 - y^2 = 4$ denklemi ile verilen hiperbolün asimptotlarının denklemi, aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = \pm 2x$ B) $y = \pm \frac{1}{2} x$ C) $y = \pm x$ D) $y = \pm 4x$

13. P (4, 0) noktasına olan uzaklığı, $x = 1$ doğrusuna olan uzaklığının 2 katı olan noktaların geometrik yerini gösteren denklem aşağıdakilerdene hangisidir?

A) $3x^2 - 2y^2 = 6$ B) $9x^2 - y^2 = 9$

C) $5x^2 - 2y^2 = 15$ D) $3x^2 - y^2 = 12$

14. $y = x + n$ denklemi ile verilen doğrunun, $16x^2 - 25y^2 = 400$ denklemi ile verilen hiperbole teğet ise n nin değeri aşağıdakilerden hangisidir? $(n > 0)$

A)1 B) 2 C) 3 D) 4

15. Denklemi, $9x^2 - 16y^2 = 144$ olan hiperbole, üzerindeki $(8, 3\sqrt{3})$ noktasındaki teğetinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A)$3x - 2y = 1$ B) $3x - 2\sqrt{3}\,y = 6$

C) $3\sqrt{3x} - 2y = 8$ D) $6x - 4y = 13$

16. Denklemi, $9x^2 - 16y^2 = 144$ olan hiperbolün, odaklar arası uzaklığı kaç birimdir?

A) 5 B) 6 C) 8 D) 10

17. Asimptotlarının denklemleri, $y = \pm 2x$ olan hiperbolün, üzerindeki bir nokta $P(1, \sqrt{3})$ ise bu hiperbolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $4x^2 - y^2 = 1$ B) $x^2 - 4y^2 = 16$

C) $x^2 - 4y^2 = 1$ D) $4x^2 - y^2 = 16$

18. Odaklar arası uzaklığı 10 birim olan bir hiperbol, $13x - 16y - 20 = 0$ doğrusuna teğettir. Bu hiperbolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $4x^2 - 9y^2 = 36$ B) $9x^2 - 16y^2 = 144$

C) $16x^2 - 64y^2 = 1024$ D) $25y^2 - 36\,y^2 = 900$

19. Odak noktası F(5, 0) ve doğrultman doğrusu $x + 5 = 0$ olan parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y^2 = 5x$ B) $y^2 = 10x$ C) $y^2 = 20$ D) $y^2 = 25x$

20. Köşesi orijin, simetri ekseni Ox ekseni ve odağı F(3, 0) olan parabolün denklemi, aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y^2 = 3x$ B) $y^2 = 6x$ C) $y^2 = 9x$ D) $y^2 = 12x$

21. Denklemleri, $y^2 = 12x$ olan parabolün odağından geçen ve 0x eksenine dik olan kirişinin uzunluğu kaç birimdir?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16

22. Denklemleri, $y^2 = 4x$ olan parabolün, üzerindeki P(1, 2) noktasından çizilen teğetin denklemi, aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = x +1$ B) $y = 2x + 1$ C) $y = 2x +4$ D) $y = x - 3$

23. Denklemi, $8x - y^2 = 0$ olan parabolün üzerindeki P(2, 4) noktasından çizilen normalin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x - y - 3 = 0$ B) $x + y - 6 = 0$

C) $2x - 3y + 5 = 0$ D) $3x + 2y -1 = 0$

24. Denklemi, $y^2 = 4x$ olan parabolün, denklemi $y = x + 1$ doğrusuna **en yakın** noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) (1, 2) B) (2, 3) C) (-1, 3) D) (2, - 1)

25. $y = mx + n$ doğrusunun $y^2 = 2px$ parabolüne teğet olması için m, n ve p arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $pm^2+2n = 0$ B) $p = \frac{mn}{2}$ C) $p + mn = 0$ D) $p = 2mn$